

Iterative regularization method for simultaneous inversion of band coefficient source term and initial values in the fractional diffusion equation

Zhuanxia Liu Caixia An Jing Li Lu Liu Yang Liao

School of Computer Engineering, Xi'an Automotive Vocational University, Xi'an, Shanxi, 710600, China

Abstract

For the ill-posed problem of the inversion source term and the initial value of the time fractional diffusion equation, this paper uses the unstable Tikhonov iterative regularization method to deal with this problem. Then we give the uniqueness result of understanding and the regularization parameter selection method of the corresponding method and its error analysis. Finally, the effectiveness and stability of the method are verified by numerical examples with different noise levels and different fractional orders.

Keywords

Time fractional diffusion equation; simultaneous inversion; unsteady Tikhonov regularization method

分数阶扩散方程带系数源项和初值同时反演的迭代正则化方法

刘转霞 安彩霞 李静 刘璐 廖洋

西安汽车职业大学计算机工程学院, 中国·陕西 西安 710600

摘要

针对时间分数阶扩散方程反演源项和初值的不适定问题, 本文针对这一问题和其不适定性运用非稳态的Tikhonov迭代正则化方法来处理。然后给出了解的唯一性结果以及相应方法的正则化参数选取法及其误差分析。最后, 通过不同噪音水平和不同分数阶的数值例子验证了该方法的有效性和稳定性。

关键词

时间分数阶扩散方程; 同时反演; 非稳态的Tikhonov正则化方法

1 引言

近年来, 分数阶扩散方程在物理, 化学与生物化学, 系统生物学, 医学, 金融等多个领域的成功应用引起了人们的广泛关注。目前, 很多与时间分数阶扩散方程有关的问题已被广泛研究, 且取得了一些显著性的成果, 尤其是对于阶数 $0 < \alpha < 1$ 的情形。文献 [1] 给出了一个带有非稳定解的时间分数阶抛物型方程的新型数值算法, 文献 [2,3] 给出了时间分数阶扩散方程未知源项的识别问题。过去几十年人们都集中于单项反演的问题, 近年来基于实际应用, 对

于多项反演的问题也取得了一些成果。2017年, 文献 [4] 给出了系数识别问题即用终端时刻的数据同时反演零阶项系数和分数次阶数。文献 [5] 给出了通过边界数据的测量值同时反演两个初值, 即初始边界值以及初始温度的问题。本文将用非稳态的 Tikhonov 迭代正则化方法来考虑时间分数阶扩散方程带系数源项和初值同时识别的问题。

2 预备理论及引理

本文考虑通过两个时刻的测量数据来同时反演时间分数阶扩散方程带系数源项和初值的问题。设是一个边界足够光滑的有界开区域, 考虑以下带有 Dirichlet 齐次边界条件的分数阶扩散方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} + Lu(x, t) = q(x)f(x), & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = \phi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1)$$

【项目基金】2022年度校长专项科研计划项目“基于迭代正则化方法的时间分数阶扩散类方程反演问题”(项目编号: 2022KJ009)。

【作者简介】刘转霞(1995-), 女, 中国甘肃定西人, 硕士, 讲师, 从事大数据、计算数学研究。

其中 $q(x)(t)$ 为与 x 有关的源项的系数, $0 < \alpha < 1$, $\partial^\alpha u(x, t)/\partial t^\alpha$ 是 α 阶的 Caputo 分数阶导数, L 是一个一致椭圆算子, 其定义为

$$Lu(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} u(x) \right) + c(x)u(x), \quad x \in \Omega,$$

这里, 系数满足以下条件:

$a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq d$, $a_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $c(x) \in C(\bar{\Omega})$, $c(x) \geq 0$, $\forall x \in \bar{\Omega}$, $\forall \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$, $\xi \in \mathbb{R}^d$, 其中常量 $v > 0$, $\partial^\alpha u(x, t)/\partial t^\alpha$ 定义为

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\eta)^{-\alpha} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta, \quad 0 < \alpha < 1,$$

其中 $\Gamma(1-\alpha)$ 是 Gamma 函数。

在模型 (1) 中, 若 $f(x)$ 和 $\phi(x)$ 是已知的, 则可以通过边界条件及其它已知信息来求解得到 $u(x, t)(t \in (0, T])$, 本文将要通过额外的测量数据 $u(x, T_1)$, $u(x, T_2)$ 来反演源项 $f(x)$ 和 $\phi(x)$ 初值。由于在实际测量中存在一定的测量误差, 记测量数据 $g_1 \approx u(x, T_1)$, $g_2 \approx u(x, T_2)$, 它的噪音数据为 g_1^δ 和 g_2^δ , 假设测量数据和噪音数据都属于 $L^2(\Omega)$, 并且满足以下关系式:

$$\|g_1^\delta - g_1\| \leq \delta, \quad \|g_2^\delta - g_2\| \leq \delta$$

这里的 $\|\cdot\|$ 是 $L^2(\Omega)$ 上的范数, 且常数 $\delta > 0$ 是误差水平。根据问题 (1) 的线性性质, 可以将其分为两个子问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u_1(x, t)}{\partial t^\alpha} + Lu_1(x, t) = q(x)f(x), & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u_1(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u_1(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^\alpha u_2(x, t)}{\partial t^\alpha} + Lu_2(x, t) = q(x)\phi(x), & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u_2(x, t)|_{\partial\Omega} = 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u_2(x, t) = \phi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

因此, 问题 (1) 的解为 $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ 。

将算子 L 的特征值记为 $\lambda_n \in \mathbb{R}$, 其相应的特征函数记为 $\varphi_n(x) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 这意味着 $L\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$, 参考文献 [9], 则有

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty,$$

序列 $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $L^2(\Omega)$ 的正交基。

定义 1 对于 $\theta \in \mathbb{R}$, 定义一个由算子 L 引入的 Hilbert 空间 $D((L)^\theta)$ 如下

$$D((L)^\theta) = \left\{ \chi \in L^2(\Omega) : \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^{2\theta} |\langle \chi, \varphi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\},$$

其范数为

$$\|b\|_{D((L)^\theta)} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (1 + \lambda_n^{2\theta}) |\langle b, \varphi_n \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad b \in D((L)^\theta)$$

由变分原理和文献 [9], 可得到问题 (2) 和 (3) 的正问题解为

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n f_n \frac{1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha)}{\lambda_n} \varphi_n(x),$$

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) \phi_n \varphi_n(x),$$

其中 $f_n = (f, \varphi_n)$, $\phi_n = (\phi, \varphi_n)$, $q_n = (q, \varphi_n)$ 。

3 解的唯一性分析

定理 1^[9] 令 $0 < T_1 < T_2 < T$, $0 < \alpha < 1$, 假设 $u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C((0, T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ 是满足问题 (1) 的解, 源项 $f(x) \in L^2(\Omega)$, 初值 $\phi(x) \in L^2(\Omega)$ 。如果 $u(x, T_1) = u(x, T_2) \equiv 0$ 在 Ω 上成立, $q(x) \neq 1$, 则可以得到在 $L^2(\Omega)$ 中,

$$f = \phi = 0 \quad (4)$$

定理 2^[9] 如果 f 和 $\phi \in D((L)^p)$ 满足先验界条件

$$\max\{\|q(\cdot)f(\cdot)\|_{D((L)^p)}, \|\phi(\cdot)\|_{D((L)^p)}\} \leq E, \quad (5)$$

其中 p 是一个非负常量, 则可以得到对于任意的 $t > 0$,

$$u(\cdot, t) \in D((L)^{p+1}), \quad \|u(\cdot, t)\|_{D((L)^{p+1})} \leq (1 + C/t^\alpha)E$$

定理 3^[9] 对于 $i = 1, 2$, 定义 $g_i = u(\cdot, T_i)$, 假设 $f, \phi \in D((L)^p)$ 满足 (5), 其中 p 是一个正整数, 则

$$\|qf\| \leq CE^{\frac{2}{p+2}} (\|g_1\| + (\frac{T_2}{T_1})^\alpha \|g_2\|)^{\frac{2}{p+2}},$$

$$\|\phi\| \leq CE^{\frac{2}{p+2}} (\|g_2\| + \frac{1}{1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_1 T_1^\alpha)} \|g_1\|)^{\frac{2}{p+2}}.$$

4 非稳态的 Tikhonov 正则化方法

根据子问题 (2) 和 (3) 定义以下四个线性算子:

$$(K_{1,i}(qf))(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n f_n \frac{1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_n T_i^\alpha)}{\lambda_n} \varphi_n(x), \quad i = 1, 2$$

$$(K_{2,i}(\phi))(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - E_{\alpha,1}(-\lambda_n T_i^\alpha)}{\lambda_n} \phi_n \varphi_n(x), \quad i = 1, 2$$

$$(K_1(qf, \phi)) = (K_{1,1}(qf))(x) + K_{2,1}(\phi)(x) = g_1(x)$$

$$(K_2(f, \phi)) = (K_{1,2}(qf))(x) + K_{2,2}(\phi)(x) = g_2(x)$$

本节利用非稳态的 Tikhonov 正则化方法通过两个时刻的测量数据 $u(x, T_1)$ 和 $u(x, T_2)$ 来同时反演带系数源项和初值。首先给定初始状态的 $q^0 f^0$ 和 ϕ^0 , 记第 k 步迭代时的值为 $q^k f^k$ 和 ϕ^k , 则第 $k+1$ 步的迭代值由以下变分问题得到:

$$(q^{k+1} f^{k+1}, \phi^{k+1}) = \text{Arg}_{(f \in D((L)^\theta), \phi \in D((L)^\theta))} \min J(qf, \phi),$$

其中,

$$J(qf, \phi) = \frac{1}{2} \|K_1(qf, \phi) - g_1^\delta\|_{L^2(0, T; \Omega)}^2 + \|K_2(qf, \phi) - g_2^\delta\|_{L^2(0, T; \Omega)}^2 + \frac{\mu_{k+1}}{2} \|qf - f^k\|_{D((L)^\theta)}^2 + \frac{\mu_{k+1}}{2} \|\phi - \phi^k\|_{D((L)^\theta)}^2$$

这里 $\mu_{k+1} > 0$ 是第 $k+1$ 步得到的正则值, g_1^δ 和 g_2^δ 是 g_1 和 g_2 的噪音数据。

下面本文用一个有限维估计算法来求解以上变分问题。假设 $(\varphi_n(x), n = 1, 2, \dots, \infty)$ 和 $(\psi_n(x), n = 1, 2, \dots, \infty)$ 是在 $D((L)^\theta)$ 的两个基函数集合, 令

$$q(x)f(x) \approx \tilde{q}(x)\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^N q_n f_n \varphi_n(x), \quad \phi(x) \approx \tilde{\phi}(x) = \sum_{n=1}^N \phi_n \psi_n(x),$$

其中 $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{q}(x)$, $\tilde{f}(x)$ 和 $\tilde{\phi}(x)$ 分别为估计值, f_n 和 ϕ_n ($n = 1, 2, \dots, N$) 是 $f(x)$ 和 $\phi(x)$ 的 Fourier 系数, 设 $\Phi^N = \text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$, $\Psi^N = \text{span}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N\}$ 和两个 N 维向量 $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$, $\Phi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N) \in \mathbb{R}^N$, 记 $u(x, t; qf, \Phi) = u(x, t; \tilde{q}(x)\tilde{f}(x), \tilde{\phi}(x))$ 为正问题的唯一解。

基于以上的讨论, 可以将这个反问题演化为下述最小值问题

$$\min_{\mathbf{f}, \delta \mathbf{f} \in \mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2} \|u(x, T_1; \mathbf{q}\mathbf{f}, \Phi) - g_1^\delta(x)\|_{L^2(0, T_1; D)}^2 + \frac{1}{2} \|u(x, T_2; \mathbf{q}\mathbf{f}, \Phi) - g_2^\delta(x)\|_{L^2(0, T_2; D)}^2 + \frac{\mu_{k+1}}{2} (\|\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{f}} - \hat{\mathbf{f}}^k\|_{D((L)^{\theta})}^2 + \|\hat{\Phi} - \hat{\Phi}^k\|_{D((L)^{\theta})}^2) \right\} \quad (6)$$

最小值记为 $(\mathbf{q}^{k+1}, \Phi^{k+1})$, 对于每一个 k , $\mathbf{f}^k$ 和 Φ^k 的扰动值为 $\delta \mathbf{f}^k$ 和 $\delta \Phi^k$, 为方便起见, 记 $\mathbf{f}^k$, Φ^k , $\delta \mathbf{f}^k$, $\delta \Phi^k$ 分别缩写为 $\mathbf{f}$, Φ , $\delta \mathbf{f}$, $\delta \Phi$. 由 $u(x, t; \mathbf{q}\mathbf{f} + \delta \mathbf{q}\mathbf{f}, \Phi + \delta \Phi)$ 对 $(\mathbf{f}, \Phi)$ 的线性展式, 得到

$$u(x, T_1; \mathbf{q}\mathbf{f} + \delta \mathbf{q}\mathbf{f}, \Phi + \delta \Phi) = u(x, T_1; \mathbf{q}\mathbf{f}, \Phi) + \delta \mathbf{q}\mathbf{f}\mathbf{F}_{T_1}^T + \delta \Phi\mathbf{F}_{\Phi T_1}^T \quad (7)$$

$$u(x, T_2; \mathbf{q}\mathbf{f} + \delta \mathbf{q}\mathbf{f}, \Phi + \delta \Phi) = u(x, T_2; \mathbf{q}\mathbf{f}, \Phi) + \delta \mathbf{q}\mathbf{f}\mathbf{F}_{T_2}^T + \delta \Phi\mathbf{F}_{\Phi T_2}^T \quad (8)$$

通过 (7) 和 (8), 以上最小化问题转化为

$$\min_{\delta \mathbf{f}, \delta \Phi \in \mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2} \|\delta \mathbf{q}\mathbf{f}\mathbf{F}_{T_1} + \delta \Phi\mathbf{F}_{\Phi T_1} - (g_1^\delta(x) - u(x, T_1; \mathbf{q}\mathbf{f}, \Phi))\|^2 + \frac{1}{2} \|\delta \mathbf{q}\mathbf{f}\mathbf{F}_{T_2} + \delta \Phi\mathbf{F}_{\Phi T_2} - (g_2^\delta(x) - u(x, T_2; \mathbf{q}\mathbf{f}, \Phi))\|^2 + \frac{\mu_{k+1}}{2} \delta \mathbf{q}\mathbf{f}\mathbf{A}\delta \mathbf{f}^T + \frac{\mu_{k+1}}{2} \delta \Phi\mathbf{B}\delta \Phi^T \right\}$$

其中,

$$\mathbf{A} = ((\varphi_i, \varphi_j)_{D((L)^{\theta})})_{N \times N}, \quad \mathbf{B} = ((\psi_i, \psi_j)_{D((L)^{\theta})})_{N \times N},$$

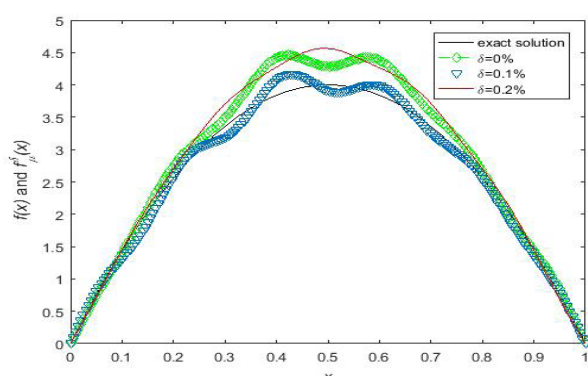
$$\text{令 } \mathbf{p} = (\mathbf{q}, \mathbf{f}, \Phi), \quad \delta \mathbf{p} = (\delta \mathbf{q}, \delta \mathbf{f}, \delta \Phi) \in \mathbb{R}^{2N},$$

$$\mathbf{W}_1 = g_1^\delta - u(x, T_1; \mathbf{q}\mathbf{f}, \Phi), \quad \mathbf{W}_2 = g_2^\delta - u(x, T_2; \mathbf{q}\mathbf{f}, \Phi),$$

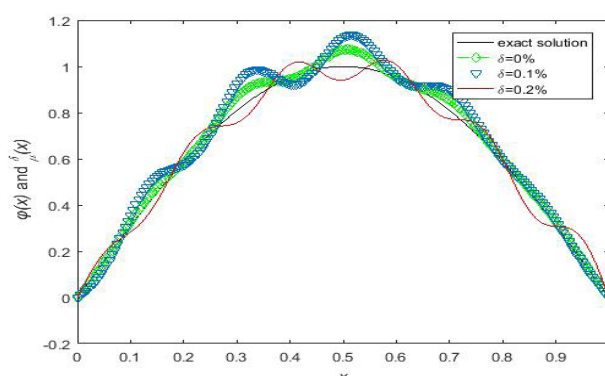
$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{T_1}^T \\ \mathbf{F}_{\Phi T_1}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{T_2}^T \\ \mathbf{F}_{\Phi T_2}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{B} \end{pmatrix}_{2N \times 2N}.$$

上述最小化问题的求解等价于求解以下问题:

$$\min_{\delta \mathbf{f}, \delta \Phi \in \mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2} \|\delta \mathbf{p}\mathbf{F}_1 - \mathbf{W}_1\|^2 + \frac{1}{2} \|\delta \mathbf{p}\mathbf{F}_2 - \mathbf{W}_2\|^2 + \frac{\mu_{k+1}}{2} \delta \mathbf{q}\mathbf{f}\mathbf{A}\delta \mathbf{f}^T + \frac{\mu_{k+1}}{2} \delta \Phi\mathbf{B}\delta \Phi^T \right\}$$



(a) 初值



(b) 源项

图 1 $\alpha = 0.3$, $T_1 = 0.01$, $T_2 = 0.5$ 时的情况

$$\frac{\mu_{k+1}}{2} \delta \Phi \mathbf{B} \delta \Phi^T \}$$

为了求解以上最小泛函, 可利用变分原理和矩阵操作, 通过以下 Euler 方程求解

$$(\mu \mathbf{D} + \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2) \delta \mathbf{p} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2,$$

这里,

$$\mathbf{G}_1 = ((F_{1i}, F_{1j})_{L^2(0, T_1; D)})_{2N \times 2N}, \quad \mathbf{G}_2 = ((F_{2i}, F_{2j})_{L^2(0, T_2; D)})_{2N \times 2N},$$

$$\mathbf{V}_1 = ((W_1, F_{1i})_{L^2(0, T_1; D)})_{2N \times 1}, \quad \mathbf{V}_2 = ((W_2, F_{2i})_{L^2(0, T_2; D)})_{2N \times 1},$$

经过以上的推导, 得到迭代方程

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{p}^k + \delta \mathbf{p}^k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

5 数值实验

本节中, 为了验证迭代算法的有效性和可行性, 给出了一个在不同噪声水平下的数值结果, 计算结果都在 Matlab 中得出。由于实际问题中测量误差是不可避免的, 所以本文给定第 k 步迭代的残差计算公式

$$E_k = \|u(x, T_1; \mathbf{q}^k \mathbf{f}^k, \phi^k) - g_1^\delta(x)\|_{L^2(0, T_1; D)} + \|u(x, T_2; \mathbf{q}^k \mathbf{f}^k, \phi^k) - g_2^\delta(x)\|_{L^2(0, T_2; D)}$$

其中 δ 为测量数据和真实数据之间的噪声水平,

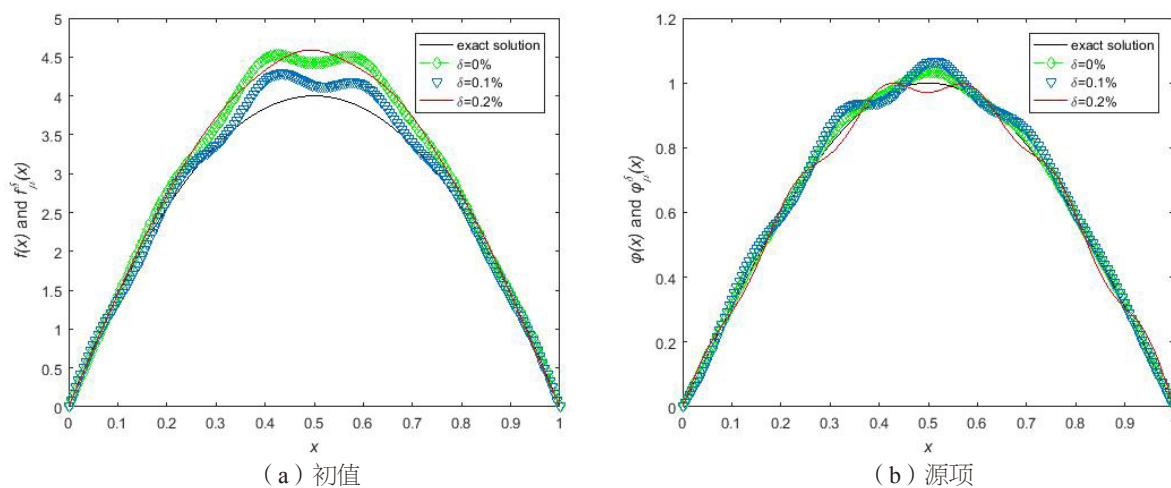
$$g_1^\delta = g_1 + g_1 \cdot \delta [2\text{randn}(\text{size}(g_1)) - 1], \quad g_2^\delta = g_2 + g_2 \cdot \delta [2\text{randn}(\text{size}(g_2)) - 1].$$

选取正则化参数满足以下条件

$$\mu_{k+1} = \mu_0 r^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

这里 $\mu_0 > 0$, $0 < r < 1$. 取正则化参数 $\mu_0 = 0.01$, $r = 0.2$ 在下图中将给出 $\alpha = 0.3$, 0.5 的数值解和精确解的拟合情况。在此, 取两个固定时刻分别为 $T_1 = 0.01$, $T_2 = 0.5$ 噪声水平 δ 分别为 0%, 0.1%, 0.3%。

图 1 和图 2 展示了在分数阶 $\alpha = 0.3$ 和 0.5 的情况下, 不同噪声水平 $\delta = 0\%$, 0.1% , 0.3% 的精确解和数值解。数值结果表明, 由于规律性的差异, 初值的重构比源项更令人满意。可以看出, 所提出的方法给出了精确的数值重建。

图2 $\alpha = 0.5$, $T_1 = 0.01$, $T_2 = 0.5$ 时的情况

参考文献

- [1] D. F. Li, W. W. Sun, C. D. Wu, A novel numerical approach to time-fractional parabolic equations with nonsmooth solutions, Numer. Math, Theory Methods Appl. 2021, 14(2), 355–376.
- [2] F. Yang, Y. P. Ren, X. X. Li, D. G. Li, Landweber iterative method for identifying a space-dependent source for the time-fractional diffusion equation, Bound. Value Probl. pages Paper No. 2017,163, 19.
- [3] S. Z. Jiang, Y. J. Wu, An inverse space-dependent source problem for a multi-term time fractional diffusion equation, J. Math. Phys. 2020, 61(12), 121502, 16.
- [4] L. L. Sun, T. Wei, Identification of the zeroth-order coefficient in a time fractional diffusion equation, Appl. Numer. Math. 2017,111:160–180.
- [5] Y. Zhang, T. Wei, Y. X. Zhang, Simultaneous inversion of two initial values for a timefractional diffusion-wave equation, Numer. Methods Partial Differential Equations.2021, 37(1):24–43.