

Auxiliary Teaching of Advanced Mathematics Based on Intelligent Optimization Algorithm

Yong Wang Ning Zhang Juan Wang

Department of Public Courses, Shandong University of Science and Technology, Taian, Shandong, 271000, China

Abstract

In view of some problems existing in the teaching of advanced mathematics, such as abstract concepts, complex calculations, and weak application scenarios, it is proposed to integrate intelligent optimization algorithms like genetic algorithms and Monte Carlo methods into teaching practice. Through algorithm principle visualization and generalized solution of mathematical problems, it helps students understand core knowledge such as calculus, equation root finding, and optimization theory, and cultivates their abilities in mathematical modeling and engineering practice. Teaching practice shows that classes using intelligent algorithms as auxiliary tools have significantly improved the accuracy rate of solving complex problems, and the participation rate and winning rate of mathematical modeling competitions have increased significantly.

Keywords

Intelligent optimization algorithms; Genetic algorithms; Monte Carlo methods

基于智能优化算法的高等数学辅助教学

王永 张宁 王娟

山东科技大学公共课教学部, 中国·山东 泰安 271000

摘要

针对高等数学教学中存在的一些诸如概念抽象、计算复杂、应用场景薄弱等问题, 提出将遗传算法、蒙特卡罗方法等智能优化算法融入教学实践。通过算法原理可视化、数学问题泛化求解, 有助于学生对微积分、方程求根、优化理论等核心知识的理解, 培养其数学建模和工程实践能力。教学实践表明, 采用智能算法辅助的班级在复杂问题求解的正确率上大大提升, 数学建模竞赛参与度和获奖率显著增加。

关键词

智能优化算法; 遗传算法; 蒙特卡罗方法

1 引言

随着人工智能技术的快速发展, 教育领域正经历着从传统教学模式向智能化、个性化方向的深刻变革。高等数学作为理工科专业的核心基础课程, 其抽象性、逻辑性的特点导致学生在学习过程中普遍面临概念理解困难、解题效率低下等问题, 其中教学手段单一、学生个体差异适配不足是重要诱因。

【基金项目】2022年泰安市科技创新发展项目(政策引导类)“基于数据探测法的大地测量反应异常数据的探测与分析”(项目编号: 2022GX090); “创新型城市建设的对策研究与路径探索——以泰安市为例”资助(项目编号: 2022ZC454)。

【作者简介】王永(1978-), 男, 中国山东新泰人, 硕士, 讲师, 从事数学教学及数据处理研究。

传统高等数学教学主要依赖“教师讲授+题海训练”模式, 存在三个显著瓶颈: 其一, 教学资源静态化, 难以根据学生实时学习状态动态调整内容; 其二, 差异化教学实施困难, 同一班级中数学基础差异可达三个水平; 其三, 复杂数学问题(如多元函数极值、微分方程求解等)的求解过程可视化程度低, 影响知识构建效果。以遗传算法和蒙特卡罗算法等为代表的智能优化算法, 因其强大的全局搜索能力和自适应特征, 已在教育资源分配、个性化学习路径规划等领域展现出独特优势, 为破解上述难题提供了新思路。

本文提出将智能优化算法用于高等数学辅助教学, 对最值(极值)求解以及定积分的求解等主题, 利用遗传算法以及蒙特卡罗算法进行了求解应用。这几个主题都是高等数学中微积分部分的核心内容, 它们的掌握程度直接影响到后续课程的学习。这些方法的应用, 对高等数学的教学起到了显著的辅助作用, 一是为高等数学教学提供了动态化、实践化的工具, 能够将抽象理论转化为可视、可操作的案例, 从而激发学生探索兴趣, 开拓学生思路, 锻炼逻辑思维以及提

高问题解决能力。二是它也为数学与其他学科（工程学、经济学）的交叉融合搭建了桥梁，符合新时代 STEM 教育的发展方向。实践表明，这些方法的应用有助于学生平题效率提升，概念理解准确率提高，学习热情高涨。

2 几种智能优化算法介绍

目前，所提出的智能优化算法已有几百种，为很多科学计算问题提供了众多的求解思路和方法。智能优化算法要解决的一般是最优化问题，涉及较多的是求解一个函数中，使得函数值最小的自变量取值的函数优化问题。这里仅介绍以下几种。

2.1 遗传算法

遗传算法（Genetic Algorithm，简称 GA）是由美国 J.H.Holland 教授于 1960 年代末提出的一种高效、实用、鲁棒性强的优化技术。它的核心思想是基于生物进化机制和原理，在“优胜劣汰、适者生存”原则下将优化问题的解决方案表示为一串编码（称为染色体），并对染色体进行交叉变异等操作，进而不断进行优化搜索。其优点是全局搜索能力强，在各个维度的搜索中都具有处理连续变量和离散变量的能力，对于一般方法不易求解全局最优解的非线性、多峰值的复杂函数，只要给出适当的目标函数，遗传算法一般都能得到准最优解。其缺点是参数设置困难、收敛速度慢，有时会陷入局部最优解。

利用遗传算法求解函数最值问题的步骤^[1]：

（1）初始化：设置进化代数计数器 $g=0$ ，设置最大进化代数 G ，随机生成 N_p 个个体作为初始群体 $P(0)$ ；

（2）个体评价：计算群体 $P(t)$ 中各个个体的适应度；

（3）选择运算：将选择算子作用于群体，根据个体的适应度，按照一定的规则或方法，选择一些优良个体遗传到下一代群体；

（4）交叉运算：将交叉算子作用于群体，对选中的成对个体，以某一概率交换它们之间的部分染色体，产生新的个体；

（5）变异运算：将变异算子作用于群体，对选中的个体，以某一概率改变某一个或某一些基因值为其他的等位基因；

（6）循环操作：群体 $P(t)$ 经过选择、交叉和变异运算之后得到下一代群体 $P(t+1)$ 。计算其适应度值，并根据适应度值进行排序，准备进行下一次遗传操作；

（7）终止条件判断：若 $g \leq G$ ，则 $g=g+1$ ，转到步骤（2）；若 $g > G$ ，则此进化过程中所得到的具有最大适应度的个体作为最优解输出，终止计算。

2.2 蒙特卡罗算法

蒙特卡罗方法（Monte Carlo Method，简称 MC）又称随机抽样技巧或统计试验方法，是由美国数学家 John Von Neumann 等几位美国科学家提出并命名的。其基本思想是通过生成随机样本，利用统计学原理来估计数学问题的解。

它利用随机数和概率统计方模拟问题，通过大量随机样本的采样，得到问题的概率分布或期望值。蒙特卡罗方法是一种计算方法，它没有固定的公式，特别适用于那些无法用解析数学公式求解的问题或公式求解非常困难的问题。

采用蒙特卡罗方法^[2]计算定积分主要有两种思想方法：一是均匀选点法，二是重点选点法（重要性采样）。均匀选点法是在整个积分区域或采样区域内均匀地生成随机点，然后根据这些点的函数值来求平均或积分估计。该法简单直观，但是如果函数在某些区域变化剧烈或者贡献大的地方很少，均匀采样可能需要很多样本才能准确估计，效率可能不高。重点选点法是根据函数特征调整采样分布，在高贡献区域增加采样密度，这样可以用更少的样本得到更准确的估计。该法的优点是显著减少方差，在复杂函数（如高维、多峰值）中效率更高。缺点是需要合理选择重要性分布，不当选择可能导致结果偏差或效率下降。

3 智能优化算法在高等数学教学中的应用

3.1 在最值（极值）计算中的应用

求最值（极值）是高等数学中的一个重要内容，是连接数学理论与实际问题的桥梁。对于一些求最值的工程实际问题，利用高等数学中的传统知识（导数法、拉格朗日乘数法、梯度法等）能够得到精确的解析解，而有些最值问题无法得到解析解，因此采用智能优化算法就显得格外重要了。利用遗传算法等智能优化算法，不论是连续函数还是非连续函数，都能够进行最值的求解。下面利用遗传算法等智能优化算法对一元函数、二元函数以及非连续函数的最值（极值）问题进行了应用求解，以展示它们在高等数学教学中的一些辅助作用。

例 1^[3] 求一元函数 $f(x) = (x^2 - 1)^3 + 1$ 在区间 $[-2, 2]$ 上的最小值。

函数 $f(x)$ 在其定义域上为连续函数，由传统方法可得，在 $x=0$ 处函数最小值为 0；采用遗传算法可得，在 $x = -5.157827 \times 10^{-5}$ 处函数最小值为 8.284709×10^{-9} 。

可以看出，对于一元函数的最值问题，利用遗传算法给出的结果与传统方法给出的结果非常接近，在一定的精度要求内可以认为是一致的，验证了智能优化方法的准确性。

例 2^[3] 求二元函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 的最小值。

函数的图像为一个开口向上的旋转抛物面，显然，由多元函数求极值的方法可得，在 $x=0, y=0$ 处函数最小值为 0。采用遗传算法（设定 $-3 < x, y < 3$ ）可得，在 $x = 2.334033 \times 10^{-5}$ ， $y = 3.096025 \times 10^{-5}$ 处函数最小值为 1.503308×10^{-9} （ ≈ 0 ）。

可以看出，对于二元函数的最值问题，在限定了 $-3 < x, y < 3$ 后，遗传算法的计算结果与传统方法的计算结果非常接近，在一定精度内可以认为是一致的，验证了智能优化方法的准确性。

例 3 求下面分段函数的最小值:

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+x+5, & -2\leq x<1 \\ x-1, & 1\leq x\leq 3 \\ -|x-4|+6, & 3<x\leq 5 \end{cases}.$$

函数特征如下:

- (1) 非连续性: 在 $x=1$ 和 3 处, 左、右极限不相等, 存在跳跃间断点; 在 $x=4$ 处, 函数从线性变为绝对值函数, 但连续。
- (2) 极值分布: 在区间 $[-2,1)$ 上有极小值 -1 和极大值 5.25 , 在区间 $[1,3]$ 上有极小值 0 和极大值 2 , 在区间 $(3,5]$ 上有极小值 5 和极大值 6 。
- (3) 最值: 综合分析上述各极值, 可得该函数的最大值 $f(4)_{\max}=6$, 最小值 $f(-2)_{\min}=-1$ 。
- (4) 由于该函数为非连续函数, 在间断点处导数不存在, 传统的求极值的方法无法使用, 故采用遗传算法进行求解, 通过计算可得当 $x=-1.999994$ 时取最小值 -0.999997 。

可以看出, 对于分段函数, 利用传统方法无法解决, 而遗传算法可以轻松解决。

3.2 在定积分计算中的应用

定积分的求解在高等数学中占有重要地位, 其传统的求解方法主要包括牛顿 - 莱布尼茨公式、分部积分法、换元积分法等。但是在实际应用中, 存在被积函数的原函数难以求解、积分区域的几何形状不规则、被积函数在积分区域内高震荡或存在不连续点的情况, 此时无法采用传统方法求解。蒙特卡罗方法为定积分的计算提供了一种新的思路, 它可以实现一重积分、二重及以上各重积分的计算。

例 4 计算定积分 $I=\int_0^1 f(x)dx$, 其中 $f(x)=x^2$ 。

如图 1 所示, 积分值即为图中阴影部分的面积。为了进行比较, 表 1 给出了利用传统方法和蒙特卡罗方法计算的结果, 图 2 为利用蒙特卡罗方法计算的结果。

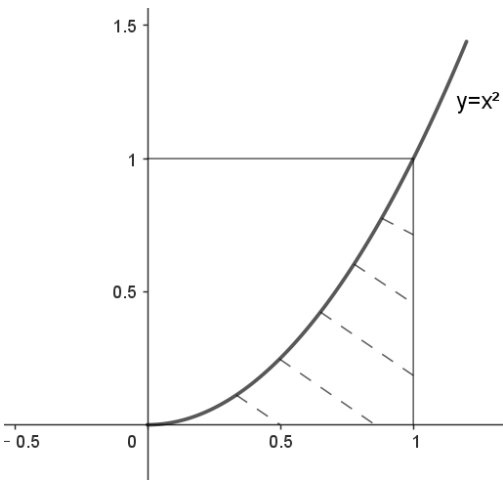


图 1 定积分计算示意图

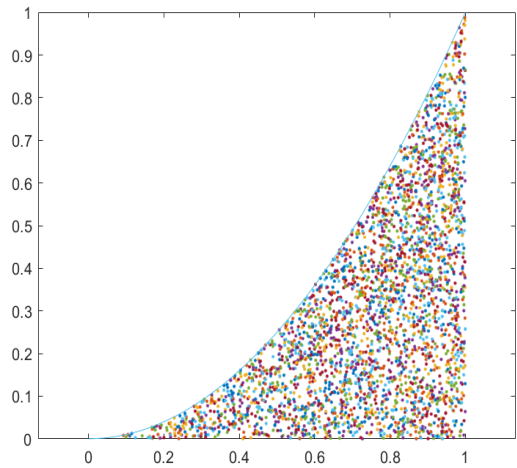


图 2 重要选点法生成随机点的情况

表 1 传统方法与蒙特卡罗算法结果比较

	传统法	重要选点法	均匀选点法
积分值	1/3	0.3295	0.3377

由表 1 可以看出, 对于一重积分, 利用蒙特卡罗算法的两种方法计算的结果与传统法的解析结果非常接近。让学生从直观的角度看到, 除了利用传统方式计算定积分, 还可以用其他方法求解。此外, 均匀选点法的思想很好地阐释了中值定理的基本原理, 也让学生从直观的角度看到中值定理的应用。计算结果的一致验证了理论推导的正确性和数值方法的有效性, 使学生更加理解数学理论和计算实践之间的互补关系, 更好地凸显了理论出真知、实践检验理论的思想。同时, 蒙特卡罗方法的核心是概率论与数理统计中的大数定律, 这对后续学习概率论与数理统计起到了很好的引导作用。

例 5^[3] 求由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=6-2x^2-y^2$ 所围成的立体体积。

该题是两个旋转抛物面的公共部分, 利用传统方法和蒙特卡罗方法分别进行了计算, 相关结果如表 2 和图 3 所示。

表 2 传统方法与蒙特卡罗算法结果比较

	传统法	重要选点法	均匀选点法
积分值	6π	18.877573	25.179399

由表 2 可以看出, 对于有些二重积分问题, 既可以利用传统方法得到解析值也可以采用智能优化方法得到数值解。虽然智能优化算法给出了很新颖的思路, 但是并不是万能的, 有些问题它也无法正确求解。对于该题, 采用蒙特卡罗方法的重要选点法可以得到较好的结果, 但是采用均匀选点法则很难求得正确解。主要原因是在积分区域的边界附近, 被积函数值的梯度变化剧烈, 该处随机点的数量太少, 从而在求解所有函数值的平均值时, 边界附近的随机点所起作用少, 从而导致了不正确的结果。从这个角度能够让学生

意识到，在学习新的科学文化知识时，一些新的方法不是万能的，它也有自己的缺点，若想正确使用它们，一定要弄清楚它们的原理，不能一知半解。这鼓励学生从失败中学习，深入理解科学文化知识的底层原理，培养灵活解决问题的能力。

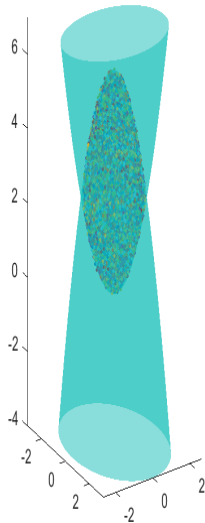


图 3 两个旋转抛物面及其相交的公共部分

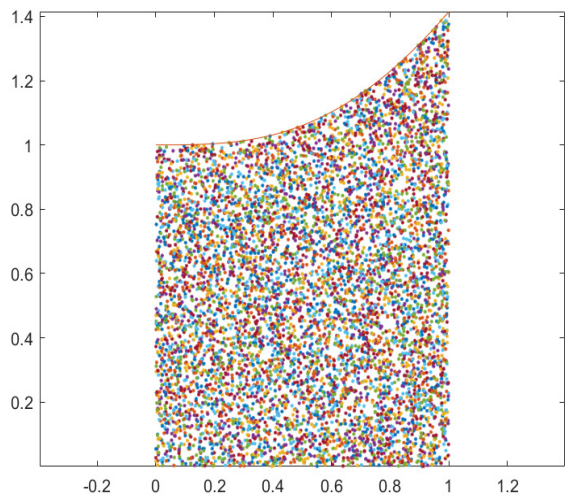


图 4 重要选点法生成随机点的情况

例 6 将例 4 中的 $f(x)$ 表示为 $f(x)=\sqrt{1+x^3}$ ，求定积分 $I=\int_0^1 f(x)dx$ 。

该题的积分问题采用传统方法很难计算。下面给出采用蒙特卡罗方法计算的结果，相关图形如表 3 和图 4 所示。

表 3 传统方法与蒙特卡罗算法结果比较

	传统法	重要选点法	均匀选点法
积分值	无法求解	1.107895	1.112204

由表 3 可以看出，对于有些一重积分问题，利用传统方法无法得到积分值，而利用蒙特卡罗算法可以解决。让学生直观的体会到了“车到山前必有路”的豁达，也认识到了学习科学文化知识的重要性。

4 结论

本文仅利用遗传算法和蒙特卡罗算法对相关问题进行了求解，对于其它的很多算法（如蜚螂优化算法、粒子群优化算法等）同样适用。同时，本文仅从最值（极值）求解、定积分求解两个方面探讨了智能优化算法的应用。其实，对于高等数学中的其他知识，如方程的求解、无穷级数的求解等都可以用智能优化算法进行分析计算。智能优化算法以其强大的功能，能很好地弥补传统解析法的不足，为大学数学教学提供了从抽象理论到实际应用的桥梁，其动态性、直观性和跨学科特点能够激发学生学习兴趣，培养解决复杂问题的综合能力。未来随着教育技术的进步，智能算法与数学教学的深度融合将推动教学模式的创新，助力培养具备数学思维与工程实践能力的复合型人才。

参考文献

[1] 包子阳 等.智能优化算法及其MATLAB实例[M].电子工业出版社.2021年1月

[2] 康崇禄.蒙特卡罗方法理论和应用[M].科学出版社.2015年1月

[3] 同济大学数学科学学院.高等数学（第八版）[M].高等教育出版社.2023年6月

[4] 雷英杰 等.MATLAB遗传算法工具箱及应用(第2版) [M].西安电子科技大学出版社.2014年2月

[5] 周明 等.遗传算法原理及应用[M].国防工业出版社.1999年6月

[6] 李继成 等.数学实验（第三版）[M].高等教育出版社.2020年8月