

Exploring the "infinite nesting" —— fractal geometry in nature and the wonderful collision with high school mathematics

Beibei Liu

Wenanyi School, High School Affiliated to Tsinghua University, Yan'an, Shaanxi, 717200, China

Abstract

Fractal geometry, a novel discipline distinct from traditional geometry, focuses on exploring infinitely complex patterns with self-similarity. This mathematical framework not only enriches academic culture but also enhances students' critical thinking, ignites learning motivation, and elevates the engagement in secondary school mathematics education. Moreover, it demonstrates significant practical applications. Integrating fractal geometry into high school curricula aligns with both contemporary educational demands and students' developmental needs.

Keywords

self-similarity; fractal geometry; high school classroom

探索自然中的“无限嵌套”——分形几何与高中数学的奇妙碰撞

刘贝贝

清华大学附属中学文安驿学校, 中国·陕西 延安 717200

摘要

分形几何学是不同于传统几何的新事物, 是一门研究无限复杂但具有自相似性的图形的几何学。分形几何不仅能够丰富数学文化, 而且能够锻炼学生的思维能力、激发学生学习兴趣、增加中学数学课堂的趣味性, 亦具有重要的实际应用价值。分形几何进入高中课堂, 既符合时代发展的需要, 又切合学生发展的需要。

关键词

自相似性; 分形几何; 高中课堂

1 分形几何研究背景

“分形几何”简单说就是研究无限复杂但具有自相似性的图形的几何学^[1]。何为“自相似性”? 我们简单举例。如一颗大树, 从局部观察树的形状, 其形状是极不规则的。此后, 我们取下此树的树枝用放大镜近距离观察树枝的形状, 我们惊奇发现大树与树枝形状相似。这种“相似”在几何上称之为自相似性。具有“自相似性”的这些图形在我们的身边到处可见。如 树、雪花、云、贝壳等。这些图形都具有自相似性, 是不同尺度上不断重复的形成的图形。

除此之外, 高中学习中我们也接触到很多此类图形。如“谢尔宾斯基三角形”、“科赫曲线”等。

这些图形的形成是通过简单的迭代规则生成复杂的形状, 具有重要的研究价值。日本著名分形专家高安委修树说, “分形这一概念不仅是数学家需要掌握的, 而是

在高中年级就应该学习的”。

2 分形几何进入高中课程的意义

2.1 锻炼学生创新思维能力

自然界中存在着很多不规则、自相似的图形。它是传统欧几里得几何学所不能解决的问题。这些不规则不仅描绘自然现象, 比如实际生活当中的树枝、雪花等, 而且在生活中有着广泛的应用, 比如在经济、电影制片等方面具有广泛应用。分形几何突破了传统欧式几何的局限, 开创了新的研究领域。

分形几何给学生带来了一种全新的几何观念^[2]。让他们学习分形几何初步知识, 帮助他们实现从欧氏几何领域向分形几何领域的认知的初步跨越, 分形几何将使学生会和学习一种开拓性的思维方法, 创新思维必将得到很好的培养。

2.2 激发学生的学习兴趣

如何研究、描述和量度这种不规则和具有“自相似”的结构的几何图形激发当今数学领域学生的学习兴趣。

【作者简介】刘贝贝(1994-), 女, 中国陕西延安人, 硕士, 中学二级教师, 从事中学教育研究。

分形几何的初步知识渗入高中课程意味着非线性科学向初等教育伸出了触角,它将从具体实际例子出发。使几何不在生硬,不再死板。在一定的程度上,可充分促进学生产生探索几何学发展的兴趣,充分激发学生的学习兴趣,进而影响学生的未来发展。

2.3 增加数学课堂的趣味性

美丽的分形图形在自然界中广泛存在。如图1所示的孔雀开屏图、“谢尔宾斯基三角形”、雪花分形图、树分形图等等。这些优美的图形极大的改变了数学课程枯燥无味的

传统形象。丰富多彩的图形让每个学生都能参与其中,极大地增加了数学课堂的趣味性^[3]。

3 分形几何在高中课程中的渗透举例

3.1 “谢尔宾斯基三角形”的有关研究

例 人教 A 版高中数学选择性必修二的第 6 页例 4^[4]。

如图 2 中的一系列三角形图形成为谢尔宾斯基三角形。在图中四个大三角形中,着色的三角形的个数依次构成一个数列的前 4 项,写出这个数列的一个通项公式。

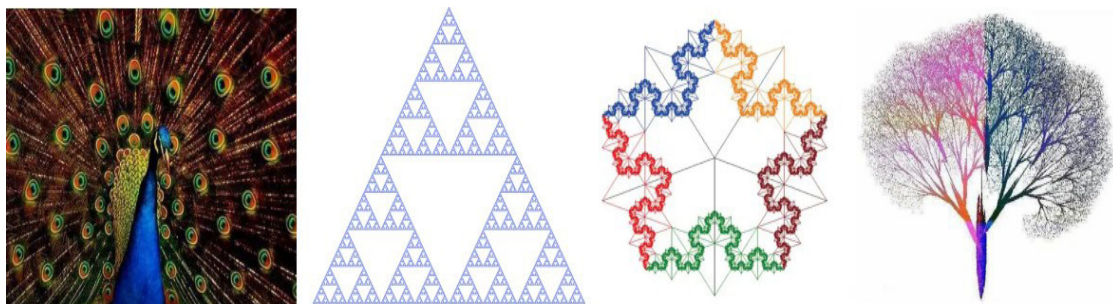


图 1 “分形图形”展示



图 2 谢尔宾斯基三角形

着色三角形个数: 设“谢尔宾斯基三角形”每次生长后的着色三角形个数构成数列 $\{a_n\}$ 。

从图 2 可以看出。

$$a_1=1, a_2=3a_1, a_3=3a_2, a_4=3a_3, \dots, a_n=3a_{n-1} \quad (1)$$

通过公式 1 可知, 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 3 的等比数列。其通项公式为 $a_n=a_1 \cdot 3^{n-1}$ 。

3.2 “雪花曲线”的有关研究

例 人教 A 版高中数学选择性必修二的第 55 页第 3(3) 题的相关研究。

我们把形似“雪花”的分形图形叫“雪花曲线”, 又称“科赫曲线”。其形成过程如下:

第一步: 从一个等边三角形开始;

第二步: 将第一步中的等边三角形的三条边三等分, 以三等分后的“中间一段”为边向外作正三角形, 并把这“中间一段”抹掉;

第三步: 重复上述两步, 画出更小的三角形。不断重复, 直至无限次, 就得到了“雪花曲线”, 如图 3 所示。

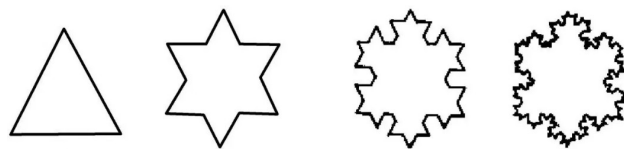


图 3: “雪花图形”形成过程

“雪花曲线”是由包含递推关系的简单规则生成的。现在我们用数列的性质研究“雪花曲线”的周长和它围起来的封闭区域的面积^[5,6]。

边长: 设“雪花曲线”每次生长后的边长构成数列 $\{a_n\}$ 。从图 3 可以看出。

$$a_2=\frac{1}{3}a_1, a_3=\frac{1}{3}a_2, \dots, a_n=\frac{1}{3}a_{n-1} \quad (2)$$

通过公式 2 可知, 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列。其通项公式为 $a_n=a_1 \cdot (\frac{1}{3})^{n-1}$ 。

边数: 设“雪花曲线”每次生长后的边数构成数列 $\{b_n\}$ 。从图 3 可以看出。

$$b_1=3, b_2=4b_1, b_3=4b_2, \dots, b_n=4b_{n-1} \quad (3)$$

通过公式 3 可知, 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 3, 公比为 4 的等比数列。其通项公式为 $b_n=3 \cdot 4^{n-1}$ 。

周长: 设“雪花曲线”每次生长后的边数构成数列 $\{L_n\}$. 从 2 和 3 可得。

$$\begin{aligned} L_1 &= a_1 \cdot b_1 = 3a_1, \\ L_2 &= a_2 \cdot b_2 = \frac{1}{3}a_1 \cdot 4b_1 = \frac{4}{3}L_1, \\ L_3 &= a_3 \cdot b_3 = \frac{1}{3}a_2 \cdot 4b_2 = \frac{4}{3}L_2, \\ &\dots \\ L_n &= a_n \cdot b_n = \frac{1}{3}a_{n-1} \cdot 4b_{n-1} = \frac{4}{3}L_{n-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

通过以上分析可得, 数列 $\{L_n\}$ 是首项为 $3a_1$, 公比为 $\frac{4}{3}$ 的等比数列。其通项公式为 $L_n = 3a_1 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$ 。

面积: 设“雪花曲线”每次生长后围成的区域的面积构成数列 $\{S_n\}$ 。则由公式 2 和图 3 可得

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{\sqrt{3}}{4}a_1^2, \\ S_2 &= S_1 + b_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a_2^2, \\ S_3 &= S_2 + b_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a_3^2, \\ &\dots \\ S_n &= S_{n-1} + b_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a_n^2 \end{aligned} \quad (5)$$

上式可以写为

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= b_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a_2^2, \\ S_3 - S_2 &= b_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a_3^2, \\ &\dots \\ S_n - S_{n-1} &= b_{n-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a_n^2 \end{aligned}$$

应用“累加法”得 $S_n = \frac{3\sqrt{3}}{20} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right] a_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a_1^2$;

当 n 趋于无穷大时, “雪花曲线”围成的面积趋于 $\frac{2\sqrt{3}}{5}a_1^2$ 。

通过上述的分析我们得到。当“生长”次数 n 趋近于无穷大时, $\{L_n\}$ 是关于 n 的增函数。这也表明了, “雪花曲线”的长度可以无限大; 当“生长”次数 n 趋近于无穷大时, $\{S_n\}$ 趋近于一个确定的值, 也就是说“雪花曲线”围起来的面积有限。这是传统几何学无法解释的, 也是学生对“分形几何”的初步感知。

4 展望

分形几何丰富了数学文化、锻炼学生的思维能力、激发学生学习兴趣、增加中学数学课堂的趣味性, 具有重要的实际应用价值。分形几何不再是‘超纲内容’, 而是打开数学之美的钥匙——它让抽象公式与自然对话, 让逻辑推理与艺术共生。从一片雪花到一座城市, 分形几何教会学生: 世界的复杂背后, 往往藏着最简单的规则。通过分形几何, 我们不仅传递知识, 更传递一种思维方式——用数学的眼光观察世界。

参考文献

- [1] 王春波. 关于分形几何进入高中课程的探索 [D]. 辽宁师范大学, 2007.
- [2] 舒昌勇. 对分形几何初步进入普通高中数学课程的思考 [J]. 数学通报, 2002, (03): 24-26. [3] 许荣好. 分形几何在高中数学中的渗透 [J]. 数学之友, 2022, 36(01): 58-59+62.
- [4] 章建跃, 李增沪. 普通高中教科书数学选择性必修第二册 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [5] 王铮, 宋莉莉. 数学欣赏 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2022, 146-153.
- [6] 赵齐猛. 挖掘教材的数学文化价值——从 Koch 曲线谈起 [J]. 中学数学, 2014, (24): 65-67.