Take Question 24 of the 2024 Wuxi High School Entrance Examination Mathematics and its adapted questions as an example

Yuxiang Zhu

Jiangnan University Affiliated Experimental High School, Wuxi, Jiangsu, 214000, China

Abstract

This paper takes the 24th question of the 2024 Wuxi High School Entrance Examination Mathematics and the adapted question of the 2025 Wuxi Binhu District First Mock Exam as examples. Through the analysis of the students' learning conditions, exploration and comparison of various solutions in the two exercises, it summarizes universal teaching reflections. Research shows that students generally have core problems such as weak knowledge connection ability, poor model recognition awareness, and insufficient higher-order thinking such as transformation and construction in complex geometric situations. The article proposes that teaching should return to the textbook to consolidate the foundation, carefully select exercises to focus on expansion, and accumulate experience to promote internalization. The aim is to provide references for junior high school geometry teaching and review and preparation, helping students advance their abilities from "solving problems" to "solving problems", and achieving a substantial improvement in mathematical literacy.

Keywords

Geometry questions in the high school entrance examination Solution mining Teaching implications Adapted from the original topic; Mathematical literacy

从真题到改编：中考几何题的解法挖掘与教学启示

诸玉香

江南大学附属实验中学，中国 · 江苏 无锡 214000

摘　要

本文以2024年无锡中考数学第24题及2025年无锡滨湖区一模改编题为例，通过对两次练习的学情分析、多样解法探究与对比，总结出具有普遍性的教学反思. 研究表明，学生在复杂几何情境下普遍存在知识联结能力弱、模型识别意识差、转化与构造等高阶思维不足等核心问题. 文章提出教学应回归教材夯实基础、精选习题重在拓展、积累经验促成内化，旨在为初中几何教学及复习备考提供参考，助力学生从“解题”到“解决问题”的能力进阶，实现数学素养的实质提升.

关键词

中考几何题；解法挖掘；教学启示；原题改编；数学素养

1 引言

初三总复习阶段，2024 年无锡中考数学卷第 24 题频繁以不同形式出现在练习卷中，成为典型题目. 然而，学生作答表现却不尽如人意. 本文通过对该题及改编题的练习数据、错题情况分析，结合多样解法探究，总结教学反思，以期为初中几何教学及复习备考提供参考.

2 原题与改编题练习：学情分析与解法呈现

2.1 2024 无锡中考原题（第一次练习）

题目：如图 1，在 $\triangle ABC$ 中，$AB > AC$.

（1）尺规作图：作 $\angle BAC$ 的角平分线，在角平分线上确定点 D，使得 $DB = DC$；（不写作法，保留痕迹）

（2）在（1）的条件下，若 $\angle BAC = 90°$，$AB = 7$，$AC = 5$，则 AD 的长是多少？（请直接写出 AD 的值）

学情分析：本题满分 10 分，全年级均分 4. 82 分. 学生问题集中在第（2）问，反映出对“角平分线性质”理解不深、“辅助线构造”方法匮乏，难以将条件与图形特征结合运用.

多样解法探究

解：（1）略.

（2）解法 1：利用角平分线性质与正方形判定

如图 2，过点 D 作 $DP \perp AB$，$DQ \perp AC$，垂足分别为 P、Q. 由角平分线性质得 $DP = DQ$，结合 $DB=DC$，可

【作者简介】诸玉香（1982-），女，中国江苏无锡人，本科，中学一级教师，从事数学与应用数学研究。

证 Rt △ DPB ≌ Rt △ DQC，从而 $PB = QC$. 易证四边形 $APDQ$ 为正方形，故 $AP=AQ$. 设 $PB=QC=x$，则 $7-x=5+x$，解得 $x=1$，故 $AP=6$，$AD = 6$.

解法 2：借助角平分线的对称性构造全等

如图 3，在 AB 上截取 $AE=AC=5$，连接 DE. 易证△ AED ≌△ ACD，故 $DE=DC=DB$. 过 D 作 $DP \perp AB$，利用等腰三角形三线合一，求得 $AP=6$，$AD = 6$.

解法 3：（略，保留核心思路：通过旋转将分散条件集中，证明△ ADG 为等腰直角三角形，从而求解. ）

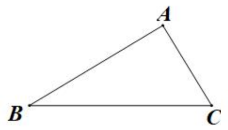

图 1

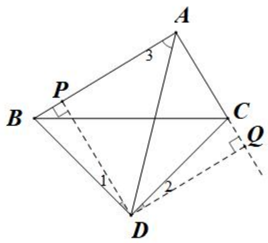

图 2

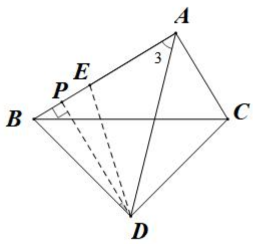

图 3

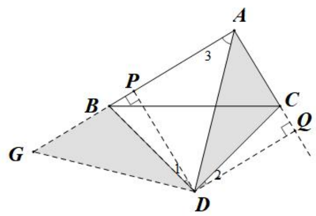

图 4

2.2 2025 无锡滨湖区一模改编题（第二次练习）

题目：如图 5，AB 为⊙ O 的直径，点 C 在⊙ O 上，∠ ACB 的平分线交⊙ O 于点 D，过点 D 作 DE // AB，交 CB 延长线于点 E.

（1）求证：DE 是⊙ O 的切线；

（2）若 $AC = 12$，$BC = 5$，求 CD 的长.

学情分析：满分 10 分，均分 5. 09 分. 第（1）小题证切线学生基本掌握，主要困难在于第（2）小题需自主推导 $AD=BD$，并灵活构造三角形或利用圆的性质求解，反映出知识迁移与综合运用能力不足.

应该说本题与 2024 无锡中考题第 24 题几乎是如出一辙，唯一的区别在于题目背景中多了一个△ ABC 的外接圆，另外题目中没有直接给出 $AD = BD$，这个结论需要学生根据“相等的圆周角所对的弦相等”自己推导出来. [1]

多样解法探究

解：（1）过程略.

（2）解法 1（同上）： 过点 D 作垂线，构造全等与正方形，通过设未知数建立方程求解.

解法 2、解法 3 同上，见图 7、图 8.

因为题目背景中有圆，AB 身份是直径，容易先求出直径、半径，另外在圆中，同弧所对的圆周角相等，因此可以轻松实现相等角的转化，同时角相等可以转化到三角函数相等. 故可以想到下面的解法 4、5、6.

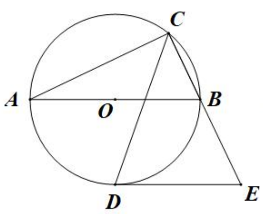

图 5

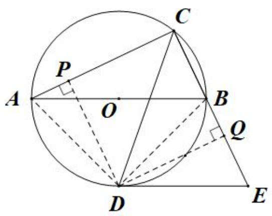

图 6

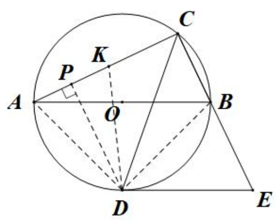

图 7

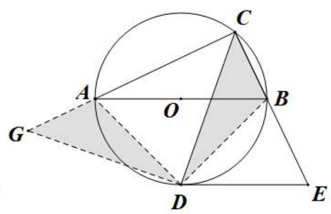

图 8

利用三角函数与直角三角形求解

解法 4：

如图 9，∵ $AB = 13$，△ ABD 为等腰直角三角形，∴ $BD = \frac{13\sqrt{2}}{2}$. 过点 B 作 $BH \perp CD$，垂足为 H，$CB = 5$，∠ $1 = 45°$ ，易得 $CH = BH = \frac{5\sqrt{2}}{2}$，在 Rt△$DBH$ 中，$BD=\frac{13\sqrt{2}}{2}$，$BH=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，， 易得 $DH = 6\sqrt{2}$，故 $CD=CH+DH=\frac{5\sqrt{2}}{2}+6\sqrt{2}=\frac{17\sqrt{2}}{2}$.

解法 5：如图 10，$\tan∠4 = \tan∠3 = \frac{5}{12}$. 过点 B 作 $BH \perp CD$，垂足为 H，在 Rt △ DBH 中，设 $BH = 5x$，$DH = 12x$，Rt △ CBH 中，$CH = 5x$，$CB = 5\sqrt{2}x=5$，故 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$CD=17x=\frac{17\sqrt{2}}{2}$.

当然，利用左侧△ ACD 中边和角的条件求 CD 长，方法和利用右侧△ CDB 中边和角的条件求 CD 长是一样的.

法 6：如图 11，过点 C 作 $CN \perp DE$，垂足为 N，交 AB 于点 M. 易证 $CM \perp AB$，利用 $\tan∠ABC = \frac{12}{5}$，可以解出 $CM=\frac{60}{13}$，$BM=\frac{25}{13}$，$CN=CM+MN=\frac{289}{26}$，$DN=OM=OB-BM=\frac{119}{26}$，再在 Rt △ CDN 中，由勾股定理求得 $CD=\frac{17\sqrt{2}}{2}$.

应该说本题求 CD 长的方法较多，大家可以继续思考其它的解法. 总之，求 CD 长，

我们可以把 CD 置身于某个三角形中，然后利用所学知识解该三角形即可. 本题还可以怎么考查呢？学生们后续又进行了思考，他们提出以上条件不变，问题可改为求 BE、DE 长？

解法 1：如图 12，过点 B 作 $BF\perp DE$，垂足为 F. 利用 $\tan\angle E=\tan\angle ABC=\dfrac{12}{5}$，$BF=OD=\dfrac{13}{2}$，$\therefore EF=\dfrac{65}{24}$，$BE=\dfrac{169}{24}$，$DE=DF+EF=\dfrac{221}{24}$.

解法 2：如图 13，连接 BD、AD，利用 $\triangle CDA\backsim\triangle DEB$，易得 $EB=\dfrac{169}{24}$，$DE=\dfrac{221}{24}$.

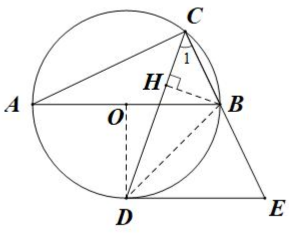

图 9

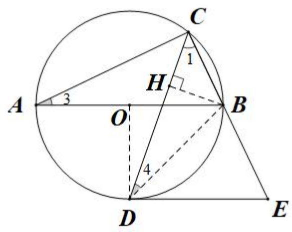

图 10

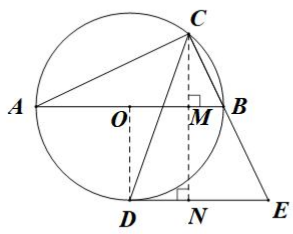

图 11

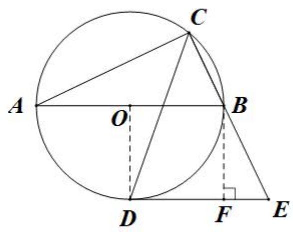

图 12

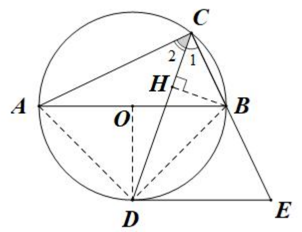

图 13

3 教学反思

3.1 回归教材，夯实基础

教材是中考命题的根本源头，复习时必须回归教材，筑牢根基. 教师首先要“用实”教材，确保学生熟练掌握基础题型，深刻理解其中蕴含的概念、定理与公式. 如上面一模改编题圆中出现角平分线，我们需引导学生同时联想到其性质定理与等弧、等弦的关系；其次要“用好”教材，深入挖掘典型例题所承载的数学思想与方法. 最后要“用活”教材，基于学情，整合多方资源，对题目进行合理改编与拓展，以此训练学生思维的深刻性与广阔性. [2]

3.2 题不在大，有魂则灵

习题的选择不应追求“大”，而应注重“魂”，即兼顾“典型性”与“思想性”. 要精选那些能贯穿转化、数形结合等核心数学思想的经典题，力求“以一抵百”. 这类问题解法应自然，其策略能迁移至同类问题，帮助学生达到“会一题，通一类”的效果. 例如，无锡中考第 24 题揭示的 A、B、C、D 共圆结构，与后续一模题实为“形异实同”. 教学时应引导学生洞见此类问题的本质，掌握通性通法，从而提升其识图、析图与解图的关键能力.

3.3 积累经验，形成内化

数学学习是活动经验不断内化的过程. 其一在于唤醒原有经验，形成条件反射式的“最近联想”. 例如，见“角平分线”即联想其性质、对称性及可能构造的全等或相似；遇“直径”则关联圆周角为直角等性质. 其二在于通过解题实践内化并生成“新的经验”. 比如在中考 24 题中，由角平分线可引发“翻折”构造，由互补角与相等线段可催生“旋转”变换，这种将静态图形动态审视的视角，本身就是一种高阶的经验内化. 教学应致力于将学生旧有经验作为新知识的生长点，促使其自然“生长”出新的解题策略与数学洞察力. [3]

4 结语

2024 无锡中考数学第 24 题及改编题，是几何教学与复习的优质素材. 通过练习分析、解法探究，我们明晰学生短板与题目价值. 教学中，回归教材筑牢基础、精选习题培养思维、积累经验促进内化，才能让学生从“会解题”迈向“会思考”，从容应对中考，实现数学能力进阶. 未来教学，需持续以题为媒，深挖本质，助力学生数学素养提升.

参考文献

[1] 章建跃. 核心素养导向的初中数学教学与评价[M]. 北京：北京师范大学出版社，2021.

[2] 刘东升. 中考数学试题的“源”与“流”——以几何综合题为例[J]. 中学数学教学参考，2023(16): 56-59.

[3] 张奠宙. 数学教育中的“异曲同工”与“殊途同归”[J]. 数学通报，2021，60(05): 1-4.