Application and reflection of spatial vector method in vertical relationship

Jiaojiao Guo

Affiliated Middle School of Taiyuan Normal University, Taiyuan, Shanxi, 030000, China

Abstract

As a bridge connecting geometry and algebra, spatial vectors provide powerful algebraic tools for solving solid geometry problems. This paper explores the principles and applications of spatial vectors in proving perpendicular relationships. It first constructs a vector-based representation theory for perpendicular relationships centered on directional vectors and normal vectors, then systematically analyzes the internal logic, applicable scenarios, and operational points of three core proof methods: the base vector method, coordinate method, and normal vector method. Through in-depth analysis of typical teaching cases, the paper demonstrates the effectiveness of the universal problem-solving approach: "vectorizing geometric problems, proceduralizing vector operations, and geometricizing computational results." The study argues that the value of vector methods lies not only in their procedural advantages but also in their profound cultivation of students' numerical-geometric integration thinking, transformation and reduction abilities, and logical reasoning literacy. Teaching should emphasize guiding students to understand the essence of methods and flexibly select strategies based on problem characteristics, thereby achieving a leap from knowledge mastery to conceptual elevation.

Keywords

spatial vector; normal vector; basis method; teaching strategy; core mathematical literacy

空间向量法在垂直关系中的应用阐释与反思

郭娇娇

太原师范学院附属中学，中国·山西 太原 030000

摘　要

空间向量作为沟通几何与代数的桥梁，为解决立体几何问题提供了强有力的代数化工具。本文深入探讨了空间向量在证明垂直关系中的原理和应用。文章首先构建了以方向向量和法向量为核心的垂直关系向量表征理论体系，进而系统剖析了基底法、坐标法及法向量法三种核心证明方法的内在逻辑、适用情境与操作要点。通过典型教学案例的深度解析，本文阐释了“几何问题向量化、向量运算程序化、运算结果几何化”这一通用解题路径的有效性。研究认为，向量方法的价值不仅在于其程序性优势，更在于其对学生数形结合思想、转化与化归能力及逻辑推理素养的深刻培养。教学中应注重引导学生理解方法本质，根据问题特征灵活选择策略，从而实现从知识掌握到思维跃迁的升华。

关键词

空间向量；法向量；基底法；教学策略；数学核心素养

1 引言

立体几何是培养学生空间想象能力与逻辑推理能力的关键领域，然而，传统综合法常因辅助线的巧妙构造而使学生面临思维瓶颈。空间向量的引入，标志着立体几何研究方法的一次范式转变，它将形的关系转化为数的运算，极大地降低了思维难度，提供了通性通法的解决路径。《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》明确强调学生应“能用向量语言表述直线与直线、直线与平面、平面与平面的垂直与平行关系”，并“体会向量是研究几何问题的有效工具”[1]。垂直关系作为空间位置关系的核心内容之一，是检验向量法效能的绝佳场域。本文立足高中数学人教 A 版教材，选择性必修一，1.4.1，用空间向量研究直线、平面的位置关系，第三课时，空间中直线、平面的垂直的的教学设计，针对例 4 的三种解答方法进行探索，旨在超越具体的课堂活动安排，从理论根基、方法论体系及教学价值三个维度，对空间向量法在证明垂直关系中的应用进行深度梳理与阐释，以期为一线教学提供坚实的理论支撑与清晰的实践指引。

2 空间向量与垂直关系的理论基础与表征

2.1 垂直关系的向量化表征：从直观到代数

向量方法的核心在于用向量的语言重新表述几何概念。

【作者简介】郭娇娇（1984–），女，中国山西太原人，硕士，中教一级教师，从事应用数学研究。

对于垂直关系，这一转化过程依赖于两个核心概念：直线的“方向向量”与平面的“法向量”。

线线垂直的向量判定：设直线l_1,l_2的方向向量分别为$\vec{u},\vec{v}$，在向量语言下，则精确地表述为：$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$。此判定避开了寻找传统几何中可能不存在的“直角图形”，直接触及本质。

线面垂直的向量判定：设直线l_1的方向向量为$\vec{u}$，平面 α 的法向量为$\vec{n}$。线面垂直的几何定义是直线垂直于平面内任意一条直线。向量法则巧妙地将其等价转化为：$l_1\perp\alpha\Leftrightarrow\vec{u}//\vec{v}$。这意味着直线的方向完全由平面的“垂直方向”所决定，即存在实数λ，使得$\vec{u}=\lambda\vec{v}$。这一表征将无限的验证（垂直于平面内所有直线）转化为对单一方向向量的验证。

面面垂直的向量判定：设平面α,β的法向量分别为$\vec{n_1},\vec{n_2}$。两个平面垂直，意味着它们的“垂线”相互垂直。因此，$\alpha\perp\beta\Leftrightarrow\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$。这一定义将复杂的面面关系转化为其法向量的关系，极为简洁。

2.2 通用解题路径：“三步曲”的程序化思想

用空间向量解决立体几何问题，遵循一个清晰且可重复的程序，常被称为“三步曲”[2]. 首先是化为向量问题，这是分析的起点，也是转化的关键。具体包括用向量表示点、直线（方向向量）、平面（法向量或平面内不共线的向量）。其次是进行向量运算，这是执行阶段，是向量法的“灵魂”。通过向量的加减、数乘、数量积、向量积等运算，推导出向量之间的关系式（如数量积为零、向量共线等）。

最后回到图形问题，这是解释阶段。将向量的运算结果“翻译”回几何语言，得出相应的几何结论（如垂直、平行）。

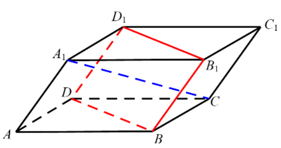
这一路径的价值在于其“程序性”和“普适性”。它将证明题转化为计算题，使学生无论面对何种复杂图形，都有章可循，有法可依。

3 垂直关系证明的核心方法体系与比较

在实践中，“三步曲”的具体实施演化出几种各具特色的方法，教师需引导学生理解其原理，并能根据问题情境做出明智选择。

题目原型：

例 4：如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AB=AD=AA_1=1$， $\angle A_1AB=\angle A_1AD=\angle BAD=60^\circ$， 求证：直线$A_1C\perp$平面 BL.



方法一：“基底法”，是立足基本定理的灵活策略。

【基底法一】根据线面垂直的判定定理，即证$A_1C\perp BD, A_1C\perp BB_1$即证 $\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{BB_1}$.

【解析】

3.1 化为向量问题

设 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$， $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$， $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$， 则 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 为空间的一个基底，且 $\overrightarrow{A_1C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$， $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$， $\overrightarrow{BB_1}=\vec{c}$.

3.2 进行向量运算

因为 $AB=AD=AA_1=1$，$\angle A_1AB=\angle A_1AD=60^\circ$，所以$\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=1$， $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}$.

因为 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}^2+\vec{b}^2-\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$，

$\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{BD}$，所以$A_1C\perp BD$

因为 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BB_1}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$，$\overrightarrow{A_1C}\perp\overrightarrow{BB_1}$，所以$A_1C\perp BB_1$.

3.3 回到图形问题

由直线与平面垂直的判定定理可知，因为$A_1C\perp BD$，$A_1C\perp BB_1$ $BD\cap BB_1=B$，$BD\subset$ 面 BDD_1B_1,$BB_1\subset$ 面 BDD_1B_1，$A_1C\perp$面 BDD_1B_1.

【基底法二】根据条件，可以$\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}\}$为基底，并用基向量表示$\overrightarrow{A_1C}$和平面$BDD_1B_1$，再通过向量运算证明$\overrightarrow{A_1C}$是平面$BDD_1B_1$的法向量即可.

【解析】在平面上，取$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{BB_1}$为基向量，则对于平面BDD_1B_1上任意一点 P，存在唯一的有序实数对(λ,μ)，使得$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BD}+\mu\overrightarrow{BB_1}$.

所以，$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD}+\mu\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BB_1}$ $=\lambda(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})+\mu(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot\vec{c}=0$.

所以 $\overrightarrow{A_1C}$ 是平面 BDD_1B_1 的法向量. 所以 $A_1C\perp$平面BDD_1B_1.

理论基础：基底法直接源于空间向量基本定理。它不依赖于坐标系，而是选择三个不共面的向量作为基底，将空间中任何向量用这组基底线性表示。

操作要点与难点：

基底选择：这是成败的关键。优选原则是：尽量选择已知模长和夹角的向量，最好是两两垂直的单位向量，若非正交，则需知夹角余弦值。例如，在平行六面体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，选择$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}$作为基底是自然的，因为它们的长度和夹角均由题设给出。

运算过程：将目标向量用基底表示后，进行数量积运算。运算中需频繁应用数量积的分配律，并代入已知的基底模长与夹角信息。

由此可见，基底法最能体现“基”的思想和转化化归思想。它训练学生在不具备理想坐标系的情况下，如何通过巧妙的基底选择搭建解决问题的平台。其难点在于基底选择的策略性和运算的复杂性，这正是培养学生数学直觉与运算

素养的契机。

方法二：坐标法，是构建数字化模型的系统策略。

【解析】以 A 为坐标原点，以直线 AB 为 x 轴，垂直 x 轴向内为 y 轴，垂直于平面 ABCD 为 z 轴建立空间直角坐标系 .

根据已知条件 $AB=AD=AA_1=1$

且 $\angle A_1AB=\angle A_1AD=BAD=60^\circ$，可得 $B(1,0,0)$，$D(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$

设 $\overrightarrow{AA_1}=(u,v,w)$，　则 $u^2+v^2+w^2=1$.

因为 $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$，则由 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AB}=u=cos60^\circ=\frac{1}{2}.\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{AD}$，

$=u\cdot\frac{1}{2}+v\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}.$

代入 $u=\frac{1}{2}$ 得，$\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}v=\frac{1}{2}$，

解得 $v=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. 由 $u^2+v^2+w^2=1$ 得 $\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+w^2=1$，即 $w^2=\frac{2}{3}$，

取 $w=\sqrt{\frac{2}{3}}$.　故 $A_1(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}})$.

由于四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(1,0,0)+(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)=(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0).$$

$$\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}})+(1,0,0)=(\frac{3}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}).$$

$$\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}})+(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)=(1,\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{\frac{2}{3}}).$$

故 $C(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0)$，　$B_1(\frac{3}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}})$，　$D_1(1,\frac{2\sqrt{3}}{3},\sqrt{\frac{2}{3}})$

现在证明向量 $\overrightarrow{A_1C}$ 与平面 BDD_1B_1 垂直。平面 BDD_1B_1 由点确定，取平面内两个不共线向量 $\overrightarrow{BD}$ 和 $\overrightarrow{BB_1}$.

$$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}=(\frac{3}{2}-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}},0-\sqrt{\frac{2}{3}})=(1,\frac{1}{\sqrt{3}},-\sqrt{\frac{2}{3}}).$$

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{2}-1,\frac{\sqrt{3}}{2}-0,0-0)=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0).$$

$$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{AB}=(\frac{3}{2}-1,\frac{1}{2\sqrt{3}}-0,\sqrt{\frac{2}{3}}-0)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}).$$

因为 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD}=1\cdot(-\frac{1}{2})+(\frac{1}{\sqrt{3}})\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})+(-\sqrt{\frac{2}{3}})\cdot 0=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0.$

$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BB_1}=1\cdot(-\frac{1}{2})+(\frac{1}{\sqrt{3}})\cdot(\frac{1}{2\sqrt{3}})+(-\sqrt{\frac{2}{3}})\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}=0.$

由于 $\overrightarrow{A_1C}$ 与平面内两个不共线向量 $\overrightarrow{BD}$ 和 $\overrightarrow{BB_1}$ 的点积均为零，因此 $\overrightarrow{A_1C}\perp$ 平面 BDD_1B_1，即直线 $\overrightarrow{A_1C}\perp$ 平面 BDD_1B_1 .

理论基础：坐标法是基底法的特例和优化。它通过建立空间直角坐标系，将基底固定为三个两两垂直的单位向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$，从而将向量运算完全坐标化、代数化。

操作要点与难点：

建系：这是首要步骤。建系的原则是：让尽可能多的关键点落在坐标轴或坐标平面上，以简化坐标计算。长方体、正方体等图形是天然的建系模型。

计算：点的坐标确定后，方向向量、法向量均可通过坐标运算求得。例如，平面法向量可通过求解与平面内两个不共线向量均垂直的向量得到，即解一个三元一次方程组。

不难看出，坐标法步骤清晰，操作规范，深受学生欢迎。它体现了彻底的“数形结合”，将几何问题完全转化为代数问题。教学中应强调建系的艺术性，并通过对比，让学生体会一个良好的坐标系如何能大幅简化计算。

方法：是法向量法，是直击问题核心的定向策略。

【方法三】直接求平面 BDD_1B_1 的法向量

【解析】设 $\vec{n}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ 为平面 BDD_1B_1 的法向量，则 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0$

所以 $\begin{cases}(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0\\(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})\cdot\vec{c}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}x=y\\x+y+2z=0\end{cases}$，

取 $x=y=1,z=-1$，所以 $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\overrightarrow{A_1C}$，所以直线 $A_1C\perp$ 平面 BDD_1B_1.

理论基础：此法聚焦于法向量的核心地位。无论是证明线面垂直还是面面垂直，最终都归结为寻找和验证法向量。

操作要点：

证明线面垂直：可转化为证明直线的方向向量与平面的法向量平行。

证明面面垂直：可转化为证明两平面的法向量垂直。

寻找法向量：常用方法是“设参求解”，即设 $\vec{n}=(x,y,z)$，利用其与平面内两个不共线向量垂直列出方程组，取一组非零解即可。

法向量法将垂直关系的证明统一到对法向量的操作上，思路集中，目标明确。特别是在证明“一条直线是一个平面的法向量”时，它展示了一种逆向思维的魅力。

由以上几种方法的讨论可知：基底法更具一般性，考验技巧；坐标法更具程序性，考验建模；法向量法则更聚焦，直指核心。在平行六面体例题中，三种方法的对比呈现，正是为了让学生领悟“条条大路通罗马”，但不同的路径各有风景与崎岖。

4 教学实践的价值反思与深化建议

向量法教学不能停留在“授人以鱼”的技法传授，更要“授人以渔”，实现思想与素养的升华。

数形结合的深化。向量本身兼具“形”与“数”的双重属性。通过向量解决垂直问题，学生能深刻体验到如何用精确的代数运算刻画抽象的几何关系，这是对数形结合思想最生动的诠释。

转化与化归的典范。将“无限”的垂直判定（如线面垂直定义）转化为“有限”的向量运算，是化归思想的经典案例。它教会学生如何将复杂、陌生的问题转化为简单、熟悉的问题。

“基”思想的初步建立。基底的选择与应用，是线性

代数中“基”与“坐标”概念的雏形。早期的渗透有助于学生未来在更高数学领域的学习。

学生的两大主要困难——“如何选基底”和“如何算下去”——恰好是教学应聚焦的核心。

培养基底直觉。教学中不应直接给出基底，而应通过一系列问题串（如“哪些向量的信息是已知的？”“你打算用哪几个向量来表示其他向量？”）引导学生自主发现和选择，从而培养对“合适基底”的敏感度。

锤炼运算能力。向量的运算，特别是非正交基底下的数量积运算，是对学生数学运算素养的极好锻炼。教师应鼓励学生耐心、细致地完成运算过程，体会“运算作为逻辑推理”的严谨性。

教学中应避免让学生形成“坐标法万能”的思维定势。应通过设置不同情境的问题，引导学生进行“方法选择的策略性思考”。比如：

图形是否易于建系？→是，优先考虑坐标法。

图形中是否存在明显的、已知长度和夹角的一组基底？→是，可考虑基底法。

问题是否直接指向法向量？→是，可用法向量法。

这种选择能力的培养，正是发展学生分析问题和解决问题能力的关键。

空间向量法在立体几何垂直关系证明中的应用，远不止于提供一套解题模板。它代表了一种现代数学的思维方式——通过建立代数结构来研究和解决几何问题。本文通过对理论基础、方法体系和教学价值的系统阐述，揭示了这一内容丰富的教育内涵。作为教师，我们的任务不仅是让学生掌握“三步曲”的操作步骤，更要引导他们领略向量语言的内在美感，理解其背后的数学思想，从而在解决每一个具体几何问题的过程中，实现思维从具象到抽象、从零散到系统、从技巧到策略的深刻转变。唯其如此，向量才能真正成为学生手中游刃有余的武器，为其后续的数学学习乃至科学探索奠定坚实的基础。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）[M]. 北京：人民教育出版社，2020.

[2] 章建跃. 核心素养立意的高中数学教材变革[J]. 课程・教材・教法，2017, 37(8): 16-22.

[3] 张景中，彭翕成. 向量、矩阵与立体几何[M]. 北京：科学出版社，2015.

[4] 王尚志，张唯一. 高中数学教学中的向量方法及其应用[J]. 数学教育学报，2019，28(3)：45-49.