Brief Analysis Proving the Collatz Conjecture

Jinliang Meng

The water pumping station of Tuomute Right Banner Tuanjie Irrigation District, Baotou, Inner Mongolia, 014100, China

Abstract

In 1930, Collatz, a student at the University of Hamburg in Germany, discovered the 3n + 1 phenomenon: for any positive integer, if it is even, divide it by 2; if it is odd, multiply it by 3 and add 1. Repeat this calculation, and eventually, the result will be 1. This conjecture later became known as the “Collatz Conjecture”. Although this conclusion has not been proven mathematically, it has been verified to be correct through examples, and computers have verified that it is correct up to 2^68. This indicates that the “Collatz Conjecture” holds in practice, but this is not sufficient as a mathematical basis for proving the conjecture. The formulation of the “Collatz Conjecture” is very simple, but proving it is extremely difficult, and the mathematical community has not yet reached a consensus, so it has become a famous unsolved problem in the field of mathematics.

Keywords

Koalas conjecture; Odd number multiplied by 3 plus 1; Even numbers divided by 2; cyclic calculation

浅析证明考拉兹猜想

孟金亮

土默特右旗团结灌区扬水站，中国·内蒙古 包头 014100

摘　要

1930年，德国汉堡大学的学生考拉兹（ Collatz ），曾经发现了3n+1现象：对任何正整数，若偶数除2，若奇数乘3加1，不断循环计算，最终都将得到1。这一猜想后来成为著名的“考拉兹猜想”。虽然这个结论在数学上还没有得到证明，但举例验证是正确的，且计算机已经验证到了2^{68}都是正确的。这表明“考拉兹猜想”在实践中是成立的，但这并不足以成为证明猜想的数学依据。“考拉兹猜想”的表述非常简单，但是对它的证明异常困难，数学界至今未能达成共识，因此它也成为了数学领域的一个著名未解难题。

关键词

考拉兹猜想；奇数乘3加1；偶数除2；循环计算

1 引言

这个猜想面目看似极其简单，但至今无人能解，魅力程度堪比数论里的哥德巴赫猜想。然而，这般的简单性却与证明猜想本身的难度形成了鲜明的对比。著名数学家保罗·埃尔德什（Paul Erdos）曾说：“数学还没有做好准备面对这样的问题”。叙述最简单，证明最最难。

27 ×3+1 82 ÷2 41 ×3+1 124 ÷2 62 ÷2 31 ×3+1 94 ÷2 47 ×3+1 142 ÷2 71
×3+1 214 ÷2 107 ×3+1 322 ÷2 161 ×3+1 484 ÷2 242 ÷2 121 ×3+1 364 ÷2
182 ÷2 91 ×3+1 274 ÷2 137 ×3+1 412 ÷2 206 ÷2 103 ×3+1 310 ÷2 155 ×
3+1 466 ÷2 233 ×3+1 700 ÷2 350 ÷2 175 ×3+1 526 ÷2 263 ×3+1 790 ÷2
395 ×3+1 1186 ÷2 593 ×3+1 1780 ÷2 890 ÷2 445 ×3+1 1336 ÷2 668 ÷2 334
÷2 167 ×3+1 502 ÷2 251 ×3+1 754 ÷2 377 ×3+1 1132 ÷2 566 ÷2 283 ×
3+1 850 ÷2 425 ×3+1 1276 ÷2 638 ÷2 319 ×3+1 958 ÷2 479 ×3+1 1438
÷2 719 ×3+1 2158 ÷2 1079 ×3+1 3238 ÷2 1619 ×3+1 4858 ÷2 2429 ×3+1
7288 ÷2 3644 ÷2 1822 ÷2 911 ×3+1 2734 ÷2 1367 ×3+1 4102 ÷2 2051 ×3+1
6154 ÷2 3077 ×3+1 9232 ÷2 4616 ÷2 2308 ÷2 1154 ÷2 577 ×3+1 1732 ÷2
866 ÷2 433 ×3+1 1300 ÷2 650 ÷2 325 ×3+1 976 ÷2 488 ÷2 244 ÷2 122 ÷2
61 ×3+1 184 ÷2 92 ÷2 46 ÷2 23 ×3+1 70 ÷2 35 ×3+1 106 ÷2 53 ×3+1
160 ÷2 80 ÷2 40 ÷2 20 ÷2 10 ÷2 5 ×3+1 16 ÷2 8 ÷2 4 ÷2 2 ÷2 1

虽然 27 是一个貌不惊人的自然数，但是按考规则运算，则它的上浮下沉异常剧烈：首先，27 要经过 77 步变换到达顶峰值 9232，然后又经过 34 步到达谷底值 1。全部的变换过程需要 111 步，其顶峰值 9232，达到了原有数字 27 的 342 倍多。但是在 1 到 100 的范围内，像 27 这样剧烈波动的数字是没有的，$54=27\times 2^n(n=1)$ 除外。

26 ÷2 13 ×3+1 40 ÷2 20 ÷2 10 ÷2 5 ×3+1 16 ÷2 8 ÷2 4 ÷2 2 ÷2 1

对相邻的两个数，按考规则运算，他们演变的路径可以说是风马牛不相及。比如说，以数字 26 开始的演变路径是这样的，如果用海拔高度来比喻，只需要爬一个 40 米的小土坡，经过 10 步就得到数字 1 了。然而与 26 紧邻的数字 27，它的演变路径可谓波澜壮阔，最高要冲到 9232 米，比珠穆朗玛峰还高，总共要经过 111 步才能得到数字 1。完全看不出其中有什么关联性。

271828 ÷2 135914 ÷2 67957 ×3+1 203872 ÷2 101936 ÷2 50968 ÷2 25484 ÷2
12742 ÷2 6371 ×3+1 19114 ÷2 9557 ×3+1 28672 ÷2 14336 ÷2 7168 ÷
2 3584 ÷2 1792 ÷2 896 ÷2 448 ÷2 224 ÷2 112 ÷2 56 ÷2 28 ÷2 14 ÷
2 7 ×3+1 22 ÷2 11 ×3+1 34 ÷2 17 ×3+1 52 ÷2 26 ÷2 13 ×3+1 40 ÷
2 20 ÷2 10 ÷2 5 ×3+1 16 ÷2 8 ÷2 4 ÷2 2 ÷2 1

对大小悬殊的两个数，按考规则运算，他们演变的路径，也可以说是风马牛不相及，比如说，以数字 271828 开始的

【作者简介】孟金亮（1962–），男，中国内蒙包头人，大专，技师，从事数学研究。

演变，经过 39 步到达谷底值 1。27 则需要经经过 111 步才能到达谷底值 1。数字 271828 是数字 27 的 10067 倍多，虽然数字 271828 远远大于数字 27，但是数字 271828 收敛于 1 的步骤比数字 27 收敛于 1 的步骤要少的多。

这个猜想又称冰雹猜想、角谷猜想。它首先流传于美国，不久传到欧洲，后来由一位叫角谷的日本人带到亚洲。因此被称为角谷猜想。

冰雹的最大魅力在于不可预知性。英国剑桥大学教授 John Conway 找到了一个自然数 27。虽然 27 是一个貌不惊人的自然数，但是如果按照上述方法进行运算，则它的上浮下沉异常剧烈：首先，27 要经过 77 步骤的变换到达顶峰值 9232，然后又经过 34 步骤到达谷底值 1。全部的变换过程（称作“雹程”）需要 111 步，其顶峰值 9232，达到了原有数字 27 的 342 倍多，如果以瀑布般的直线下落（2 的 n 次方）来比较，则具有同样雹程的数字 n 要达到 2 的 111 次方。其对比何其惊人！

但是在 1 到 100 的范围内，像 27 这样剧烈波动数字是没有的，54 等于 27 的 2 的次方倍数除外。

2 基础知识

考拉兹猜想的具体内容是：对任意正整数 n($n \in Z^+$), 若 n 为偶数则除以 2，若 n 为奇数则乘 3 再加 1，如此反复，其结果最终必会达到 1

其表达式：$f(n)=\begin{cases} n/2 & \text{if} n\equiv 0 \pmod 2 \\ 3n+1 & \text{if} n\equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$

必有 $k \in Z^+$ 使得 $f^k(n)=1$

例 314 $\underline{\div 2}$ 157 $\underline{\times 3+1}$ 472 $\underline{\div 2}$ 236 $\underline{\div 2}$ 118 $\underline{\div 2}$ 59 $\underline{\times 3+1}$ 178 $\underline{\div 2}$ 89 $\underline{\times 3+1}$ 268 $\underline{\div 2}$ 134 $\underline{\div 2}$ 67 $\underline{\times 3+1}$ 202 $\underline{\div 2}$ 101 $\underline{\times 3+1}$ 304 $\underline{\div 2}$ 152 $\underline{\div 2}$ 76 $\underline{\div 2}$ 38 $\underline{\div 2}$ 19 $\underline{\times 3+1}$ 58 $\underline{\div 2}$ 29 $\underline{\times 3+1}$ 88 $\underline{\div 2}$ 44 $\underline{\div 2}$ 22 $\underline{\div 2}$ 11 $\underline{\times 3+1}$ 34 $\underline{\div 2}$ 17 $\underline{\times 3+1}$ 52 $\underline{\div 2}$ 26 $\underline{\div 2}$ 13 $\underline{\times 3+1}$ 40 $\underline{\div 2}$ 20 $\underline{\div 2}$ 10 $\underline{\div 2}$ 5 $\underline{\times 3+1}$ 16 $\underline{\div 2}$ 8 $\underline{\div 2}$ 4 $\underline{\div 2}$ 2 $\underline{\div 2}$ 1

先确认一个显而易见的结论，按考规则，若偶数除 2，若奇数乘 3 加 1，如此形成的路径是唯一的，不会发生任何变化。

即任何一个数字的考拉兹路径是唯一的、不变的

举例说明如下：

63 $\underline{\times 3+1}$ 190 $\underline{\div 2}$ 95 $\underline{\times 3+1}$ 286 $\underline{\div 2}$ 143 $\underline{\times 3+1}$ 430 $\underline{\div 2}$ 215 $\underline{\times 3+1}$ 646 $\underline{\div 2}$ 323 $\underline{\times 3+1}$ 970 $\underline{\div 2}$ 485 $\underline{\times 3+1}$ 1456 $\underline{\div 2}$ 728 $\underline{\div 2}$ 364

当 63 算到 364 时，后续就沿着 27 路径中的 364 路径算到 1

3 证明思路

假设所有正整数按考规则运算都会得到比自己小的正整数

确定自然数列 1——n 中的每个数字对考拉兹猜想成立 $n \in Z^+$

比 n 大 1 的自然数 n + 1 按考规则运算得到比自己小的正整数 p_1

∵ $p_1 < n+1$

1——n 是连续正整数

∴ p_1 一定在自然数列 1——n 中

∵ 1——n 中的每个数字按考规则运算都能得到 1

∴ p_1 按考规则运算也能得到 1

∵任何一个数字的考拉兹路径是唯一的、不变的

∴ 自然数 n + 1 成立

即 成立范围扩大到 1——n + 1

比 n+1 大 1 的自然数 n + 2 按考规则运算得到比自己小的正整数 p_2

∵ $p_2 < n+2$

1——n+1 是连续正整数

∴ p_2 一定在自然数列 1——n+1 中

∵ 1——n+1 对考拉兹猜想成立

∴ p_2 按考规则运算也能得到 1

∵任何一个数字的考拉兹路径是唯一的、不变的

∴ 自然数 n + 2 成立

即 成立范围扩大到 1——n + 2

比 n+2 大 1 的自然数 n + 3 按考规则运算得到比自己小的正整数 p_3

∵ $p_3 < n+3$

1——n+2 是连续正整数

∴ p_3 一定在自然数列 1——n+2 中

∵ 1——n+2 对考拉兹猜想成立

∴ p_3 按考规则运算也能得到 1

∵任何一个数字的考拉兹路径是唯一的、不变的

∴ 自然数 n + 3 成立

即 成立范围扩大到 1——n + 3

……

比 $n+m$（ $m \in Z^+$ ）大 1 的自然数 $n+m+1$ 按考规则运算得到比自己小的正整数 p_{m+1}

∵ $p_{m+1} < n+m+1$

1——n+m 是连续正整数

∴ p_{m+1} 一定在自然数列 1——n+m 中

∵ 1——n+m 对考拉兹猜想成立

∴ p_{m+1} 按考规则运算也能得到 1

∵任何一个数字的考拉兹路径是唯一的、不变的

∴ 自然数 $n+m+1$ 成立

即 成立范围扩大到 1——n + m+1

所有正整数对考拉兹猜想成立

例 确定 1、2、3、4、5、6、7 成立，即按考规则运算最终都将得到 1

∵ 正整数按考规则运算得到比自己小的正整数不止一个

∴ 必存在第一个小于本身数

即首次小于本身数

例 29 $\xrightarrow{\times 3+1}$ 88 $\xrightarrow{\div 2}$ 44 $\xrightarrow{\div 2}$ 22 $\xrightarrow{\div 2}$ 11 $\xrightarrow{\times 3+1}$ 34 $\xrightarrow{\div 2}$ 17 $\xrightarrow{\times 3+1}$ 52 $\xrightarrow{\div 2}$ 26 $\xrightarrow{\div 2}$ 13 $\xrightarrow{\times 3+1}$ 40 $\xrightarrow{\div 2}$ 20 $\xrightarrow{\div 2}$ 10 $\xrightarrow{\div 2}$ 5 $\xrightarrow{\times 3+1}$ 16 $\xrightarrow{\div 2}$ 8 $\xrightarrow{\div 2}$ 4 $\xrightarrow{\div 2}$ 2 $\xrightarrow{\div 2}$ 1

29 的首次小于本身数是 22

8 $\xrightarrow{\div 2}$ 4

8 的首次小于本身数是 4

4 在 1、2、3、4、5、6、7 中

∴ 8 成立

即 1、2、3、4、5、6、7、8 成立

9 $\xrightarrow{\times 3+1}$ 28 $\xrightarrow{\div 2}$ 14 $\xrightarrow{\div 2}$ 7

9 的首次小于本身数是 7

7 在 1、2、3、4、5、6、7、8 中

∴ 9 成立

即 1、2、3、4、5、6、7、8、9 成立

10 $\xrightarrow{\div 2}$ 5

10 的首次小于本身数是 5

5 在 1、2、3、4、5、6、7、8、9 中

∴ 10 成立

即 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 成立

11 $\xrightarrow{\times 3+1}$ 34 $\xrightarrow{\div 2}$ 17 $\xrightarrow{\times 3+1}$ 52 $\xrightarrow{\div 2}$ 26 $\xrightarrow{\div 2}$ 13 $\xrightarrow{\times 3+1}$ 40 $\xrightarrow{\div 2}$ 20 $\xrightarrow{\div 2}$ 10

11 的首次小于本身数是 10

10 在 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10 中

∴ 11 成立

即 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11 成立

……

4 引理

对于等差数列 $L \cdot 2^a + d$，若正整数 d 依考规则验算至首次小于本身，得除 2 的个数 $q \leqq a$ 则 $L \cdot 2^a + d$ 的各项依考规则同步运算首次小于本身成立。

4.1 举例说明步调、系数、尾数的概念

$127 \times 3 + 1 = 382$

$3/2 \times 127 + 1/2 = 191$

$3^2/2 \times 127 + 3/2 + 1 = 574$

$3^2/2^2 \times 127 + 3/2^2 + 1/2 = 287$

$3^3/2^2 \times 127 + 3^2/2^2 + 3/2 + 1 = 862$

$3^3/2^3 \times 127 + 3^2/2^3 + 3/2^2 + 1/2 = 431$

$3^4/2^3 \times 127 + 3^3/2^3 + 3^2/2^2 + 3/2+1 = 431$

……

$3^9/2^{15} \times 127 + 3^8/2^{15} + 3^7/2^{14} + 3^6/2^{13} + 3^5/2^{12} + 3^4/2^{11} + 3^3/2^{10} + 3^2/2^9 + 3/2^7 + 1/2^3 = 77$

步调 3-2-3-2-3-2-3-2-3-2-3-2-3-2-2-3-2-2-2-2-3-2-2-2

系数 $3^p/2^q = 3^9/2^{15}$

尾数 $k=3^8/2^{15} + 3^7/2^{14} + 3^6/2^{13} + 3^5/2^{12} + 3^4/2^{11} + 3^3/2^{10} + 3^2/2^9 + 3/2^7 + 1/2^3 = 23395/32768$

系数×原数 + 尾数 = 首次小于本身数

不难看出，同步等价于同系数、同尾数

如 23　55　119 同步，系数、尾数相等

4.2 证明引理

在等差数列 $L\cdot 2^a+d$ 中，验算 d，得系数 $3^p/2^q$ 尾数 k

首次小于本身数 $3^p/2^q \times d+k$

则 $3^p/2^q \times d+k<d$ —— ①

若 $q \leqq a$

∴ 在运算中 $L\cdot 2^a+d$ 的奇偶性由 d 决定

∴ $L\cdot 2^a+d$ 和 d 同步

∴ $L\cdot 2^a+d$ 与 d 系数、尾数相等

$3^p/2^q(L\cdot 2^a+d)+k$

$=3^p/2^q \cdot L\cdot 2^a+3^p/2^q \cdot d+k$

由①，知 $3^p/2^q \times d+k<d$

∵ $0<k$

∴ $3^p/2^q \times d+k+0<d+k$

∴ $3^p/2^q \cdot d<d$

$3^p/2^q<1$

$3^p/2^q \cdot L\cdot 2^a<L\cdot 2^a$ —— ②

由②+①，得 $3^p/2^q \cdot L\cdot 2^a+3^p/2^q \cdot d+k<L\cdot 2^a+d$

即 $3^p/2^q(L\cdot 2^a+d)+k<L\cdot 2^a+d$

∵ $L\cdot 2^a+d$ 与 $d \in Z^+$

$q \leqq a \quad a-q \geqq 0$

∴ $3^p/2^q \cdot L\cdot 2^a$

$=3^p \cdot L\cdot 2^{a-q} \in Z^+$

∵ $3^p/2^q \cdot d+k \in Z^+$

∴ $3^p/2^q \cdot L\cdot 2^a+3^p/2^q \cdot d+k \in Z^+$

即 $3^p/2^q(L\cdot 2^a+d)+k \in Z^+$

则 $q\leqq a$ 时，$L\cdot 2^a+d$ 与 d 同步运算首次小于本身成立

例 在 $L\cdot 2^7+11$ 中，

验算 $11 \xrightarrow{\times 3+1} 34 \xrightarrow{\div 2} 17 \xrightarrow{\times 3+1} 52 \xrightarrow{\div 2} 26 \xrightarrow{\div 2} 13 \xrightarrow{\times 3+1} 40 \xrightarrow{\div 2} 20 \xrightarrow{\div 2} 10$

步调 3-2-3-2-2-3-2-2

得 $q=5$

这里 $a=7$ 有 $q<a$

$L\cdot 2^7+11 \xrightarrow{\times 3+1} 3L\cdot 2^7+34 \xrightarrow{\div 2} 3L\cdot 2^6+17 \xrightarrow{\times 3+1} 3^2L\cdot 2^6+52 \xrightarrow{\div 2} 3^2L\cdot 2^5+26 \xrightarrow{\div 2} 3^2L\cdot 2^4+13$
$\xrightarrow{\times 3+1} 3^3L\cdot 2^4+40 \xrightarrow{\div 2} 3^3L\cdot 2^3+20 \xrightarrow{\div 2} 3^3L\cdot 2^2+10$

假设 $L\cdot 2^7+11>3^3L\cdot 2^2+10$

$32L\cdot 2^2+11>27L\cdot 2^2+10$

$5L\cdot 2^2+1>0$

假设成立

即 $L\cdot 2^7+11>3^3L\cdot 2^2+10$

∴ $L\cdot 2^7+11$ 各项首次小于本身成立

5 证明比例为 0.99999……的自然数小于本身成立

5.1 自然数列分段排列图

自然数列以平方数为个数分段，排成列。

在自然数列分段排列图中任一行，取相邻的两个数 A 和 B 且 B > A A 沿着自然数列的方向到 B 的项数是 2^a+1

则 $B=A+(2^a+1-1)\times 1$

$B-A=2^a$

即 每一行是公差为 2^a 的等差数列

通项公式是 $(L-1)\cdot 2^a+d$ L 是项数 d 是首列数字

1	2^a+1	$2\times 2^a+1$	$3\times 2^a+1$	……
2	2^a+2	$2\times 2^a+2$	$3\times 2^a+2$	
3	2^a+3	$2\times 2^a+3$	$3\times 2^a+3$	
⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮ A	⋮B	
⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	
2^a	2×2^a	3×2^a	4×2^a	……

5.2 除 4n+3 外的所有自然数，首次小于本身成立

证明：自然数可分为两类 2n、2n+1

2n+1 又可分为两类 $4n+1$ 、 $4n+3$

则 自然数可分为三类 2n、 $4n+1$ 、 $4n+3$

2n 除 2 首次小于本身成立

$4n+1 \ \underline{\ \times3+1\ }\ 12n+4 \ \underline{\ \div2\ }\ 6n+2 \ \underline{\ \div2\ }\ 3n+1$

$4n+1$ 首次小于本身成立

$4n+3 \ \underline{\ \times3+1\ }\ 12n+10 \ \underline{\ \div2\ }\ 6n+5 \ \underline{\ \times3+1\ }\ 18n+16 \ \underline{\ \div2\ }\ 9n+8$（奇偶不确定，不能继续运算）

综上述之，除 4n+3 外的所有自然数，首次小于本身成立

在 $L\cdot2^a+d$ 中，

若 d 是 2n 类 ， 则 $L\cdot2^a+d$ 也是 2n 类；

若 d 是 4n+1 类 ，

$L\cdot2^a+4n+1=4(L\cdot2^{a-2}+n)+1$

则 $L\cdot2^a+d$ 也是 4n+1 类；

若 d 是 4n+3 类 ，

$L\cdot2^a+4n+3=4(L\cdot2^{a-2}+n)+3$

则 $L\cdot2^a+d$ 也是 4n+3 类；

∴$L\cdot2^a+2n$ ，$L\cdot2^a+4n+1$ 首次小于本身成立

5. 3.

依考规则有 $2^a-1\rightarrow3^a-1$

这时除 2 的个数为 a

3^a-1 比 2^a-1 大得多

∴在 $L\cdot2^a+2^a-1$ 中

总存在 $q>a$

即 找不到完全 $q\leqq a$ 的理想自然数列分段排列图

5.3 计算已证小于本身数比例 e_a

自然数列分段排列图共有 2^a 行

则 $e_a=(2^a-n)/2^a$

$\quad=1-n/2^a$ 　　$q>a$ 的行数 n

$3 \ \underline{\ \times3+1\ }\ 10 \ \underline{\ \div2\ }\ 5 \ \underline{\ \times3+1\ }\ 16 \ \underline{\ \div2\ }\ 8 \ \underline{\ \div2\ }\ 4 \ \underline{\ \div2\ }\ 2$

得 $q_3=4$

同理得 $q_7=7$ $q_{11}=5$ $q_{15}=7$ $q_{19}=4$ $q_{23}=5$ $q_{27}=59$ $q_{31}=56$ $q_{35}=4$ $q_{39}=8$ $q_{43}=5$ $q_{47}=54$ $q_{51}=4$ | $q_{55}=5$ $q_{59}=7$ $q_{63}=54$ $q_{67}=4$ $q_{71}=51$ $q_{75}=5$ $q_{79}=8$ $q_{83}=4$ $q_{87}=5$ $q_{91}=45$ $q_{95}=8$ $q_{99}=4$ $q_{103}=42$ $q_{107}=5$ $q_{111}=31$ $q_{115}=4$ $q_{119}=5$ $q_{123}=8$ $q_{127}=15$

由上知，取 a=7 ，有 n = 13

则 $e_7=(2^7-13)/2^7$

$\quad=1-13/2^7$

$\quad=0.8984375$

……

在 $L\cdot2^7+27$ 中，选项 $L\cdot2^{52}\cdot2^7+27$ 　项序 $L\cdot2^{52}$

∵ $q_{27}=59$

∴ 由引理知，$L\cdot2^{52}\cdot2^7+27$ 首次小于本身成立

∵ $(L+1)\cdot2^{52}-L\cdot2^{52}=2^{52}$

∴$L\cdot2^{52}\cdot2^7+27$ 项数是 $L\cdot2^7+27$ 的 $u_{27}=1/2^{52}$

同理 $u_{31}=1/2^{49}$ $u_{39}=1/2$ $u_{47}=1/2^{47}$ $u_{63}=1/2^{47}$ $u_{71}=1/2^{44}$ $u_{79}=1/2$ $u_{91}=1/2^{38}$ $u_{95}=1/2$ $u_{103}=1/2^{35}$ $u_{111}=1/2^{24}$ $u_{123}=1/2$ $u_{127}=1/2^{8}$

$e_a=(2^a+\Sigma u-n)/2^a$

$\quad=1+(\Sigma u-n)/2^a$

$e_7=1+(1/2^{52}+1/2^{49}+1/2+1/2^{47}+1/2^{47}+1/2^{44}+1/2+1/2^{38}+1/2+1/2^{35}+1/2^{24}+1/2+1/2^{8}-13)/2^7$

$\quad\approx0.9140625$

取 a=68 编程序用计算机统计指标，可计算 $e_{68}=0.99999\cdots\cdots$

6. 结论

99. 999……%的自然数，依考规则运算小于本身成立。

6 说明剩余 0.000……% 的自然数小于本身成立

首先得证明任一自然数 Z^+ 路径除 4-2-1 循环外不存在另一循环；

通过扩界，把未证小于本身数的行压缩到论证区底边一个狭长地带，比例极小。这样就形成一个已证小于本身大片区，但不排除大片区有未证小于本身的行；未证小于本身数经过反复运算总能进入大片区内部，依据首次小于本身递减法总能找到小于本身数；

考拉兹猜想的两个基本步骤：遇到奇数则 3x+1，这显然是向上发散的趋势；遇到偶数则 x/2，则变为向下收列的趋势。3x+1 必然是偶数，下一步必然是（3x+1）/2，向下收列，结果如果是偶数继续向下收列，结果是奇数则重新向上发散。考拉兹猜想成立的根本原理是，考拉兹数列向上发散的概率远远小于向下收敛的概率，或者说考拉兹数列注定会向下收敛于小于本身 . 自然数越大的奇数按考规则运算，到首次小于本身的概率远远大于到考拉兹数列向下收敛于 1 的概率 $1-1/2^n$，首次小于本身成为必然。

由于本人知识水平有限，没有办法证明剩余 0.000……% 的自然数小于本身成立，只能粗略的说明一下。希望广大同仁参与，共同完成破解世界难题之大业。

参考文献

[1] 宋爱华. 无人证明的考拉兹猜想[J].初中生学习指导,2019,(01):45.

[2] 罗莫.用河图洛书原理破解了考拉兹猜想[J].数学学习与研究,2012(11):2.

[3] 杨阳阳.考拉兹猜想证明[J].读与写(上,下旬), 2010.