

# Theoretical Essence and Application Logic of Divisibility of Numbers in Primary School Mathematics

Yingjun Yang

Central Primary School Guoyuan Town Suzhou District Jiuquan City Gansu Province, Jiuquan, Gansu, 735000, China

## Abstract

The theory of integer divisibility serves as the cornerstone of elementary mathematics, laying the foundation for understanding advanced concepts like fractions and ratios. Current teaching practices often prioritize rote memorization over conceptual understanding, resulting in fragmented knowledge that hinders effective knowledge transfer and cognitive development. This study systematically analyzes common divisibility patterns, revealing their unified theoretical basis rooted in the "positional value system" principle. It further explores connections with the "modular arithmetic" concept. The research establishes a hierarchical framework transitioning from "instrumental application" to "conceptual construction," advocating a shift from mechanical memorization to experiential learning of mathematical thinking. Practical implementation demonstrates that this approach not only deepens students' understanding of integer properties and the decimal number system, but also effectively cultivates core mathematical competencies including inductive and deductive reasoning. This transformation opens new pathways for realizing the profound educational value of primary mathematics education.

## Keywords

number divisibility; theory essence; application logic; primary school mathematics

## 探析小学数学“数的整除”规律的理论本质与应用逻辑

杨迎君

甘肃省酒泉市肃州区果园镇中心小学, 中国·甘肃 酒泉 735000

## 摘要

数的整除理论是小学数学知识体系的核心内容, 对后续分数、比例等概念的理解具有奠基作用。当前教学中普遍存在重记忆轻本质的现象, 导致学生知识碎片化, 难以实现有效迁移和思维提升。本文通过系统分析常见整除判定规律, 揭示其统一的理论本质均源于“位值制”原理, 并初步阐释其与“同余”思想的关联。研究构建了从“工具性应用”到“思维性建构”的层次化应用框架, 提出将教学重点从机械记忆转向数学思想的体验与领悟。实践证明, 这一转变不仅能深化学生对整数性质与十进制数系的理解, 更能有效培养其归纳推理、演绎推理等数学核心素养, 为实现小学数学教育的深层价值开辟了新路径。

## 关键词

数的整除; 理论本质; 应用逻辑; 小学数学

## 1 引言

在小学数学中, “数的整除”是连接整数与分数的重要桥梁, 学生掌握2、3、5、9等数的倍数特征, 对提升计算效率和解决实际问题至关重要。但当前教学普遍重记忆轻理解: 学生能背诵规律解题, 却难释原理、应对变式, 导致知识碎片化, 忽视思维培养。数学教育核心是思维塑造, 整除教学需深入理论内核。本文先阐释整除规律统一的“位值制”本质, 再构建层次化教学框架, 将规律转化为思维培养载体, 对教学实践具有重要意义[1]。

## 2 整除判定规律的理论本质: 位值制思想的深刻体现

整除判定规律表面看来纷繁各异, 但其理论根基却异常统一和坚实, 即我们赖以表示数字的“十进制位值制”原则。任何多位数都可以被理解为不同数位上数字与相应位值的乘积之和, 这是洞悉所有整除规律奥秘的唯一钥匙。位值制作为现代数学的基础概念, 其重要性不仅体现在它是表示数字的有效方式, 更在于它蕴含着丰富的数学思想和方法。通过位值制的视角来理解整除规律, 能够帮助学生建立完整的知识体系, 形成系统的数学认知。

### 2.1 核心基石: 十进制数的位值构成原理

任何一个多位数字, 其本质都是基于十的幂次的一种线性组合。理解这种构成方式, 是穿透所有整除规律表象, 直

【作者简介】杨迎君(1975-), 女, 中国甘肃酒泉人, 本科, 高级教师, 从事小学数学教学研究。

达其理论本质的第一步。在十进制数系中，每个数字因其所在位置的不同而具有不同的价值，这种位置价值体系使得我们可以用有限的符号表示无限大的数。从数学发展的历史来看，位值制的发明是人类数学思维的重要飞跃，它极大地简化了计算过程，拓展了数学的应用范围。在小学数学教学中，引导学生理解位值制的深刻内涵，不仅有助于掌握整除规律，更能为他们后续学习更复杂的数学概念奠定坚实基础<sup>[2]</sup>。

## 2.2 具体规律的理论阐释

### 2.2.1 针对二与五的整除规律

**规律表象：**一个数能被二或五整除，当且仅当其个位数字能被二或五整除。

**本质探源：**任意多位数可分解为个位部分与其余部分，后者为十的整数倍，必同时是二和五的倍数，因此整个数的整除性由个位数字的整除性决定。此规律本质是判断除数与十的分解关系，体现了分解与转化的数学思想，这种思维在数学学习中具有普遍意义。

### 2.2.2 针对四与二十五的整除规律

**规律表象：**一个数能被四或二十五整除，当且仅当其末两位数字所构成的数能被四或二十五整除。

**本质探源：**此规律是上一规律的逻辑延伸。一个多位数可以视作由“末两位以上部分”和“末两位部分”构成。前者是一百的整数倍，而一百是四与二十五的共同倍数。因此，前一部分的数值天然地能被四和二十五整除。整个数的整除性便转而取决于剩下的末两位数字所构成的数值<sup>[3]</sup>。

此规律的本质在于将判断范围从“个位与十的关系”扩展到了“末两位与一百的关系”。这种规律的推广体现了数学知识的内在联系和发展规律。通过这样的分析，学生不仅能够理解具体规律，更能体会到数学知识体系的系统性和逻辑性，从而建立起更加完善的认知结构。

### 2.2.3 针对三与九的整除规律

**规律表象：**一个数能被三或九整除，当且仅当它的各位数字之和能被三或九整除。

**本质探源：**这是所有规律中最富启发性也最能体现数学思想深度的一个。其理论根源在于探究“十的幂次除以三或九后的余数规律”。可以发现，任何十的幂次，除以三或九，其余数恒为一。这一深刻的性质意味着，在一个多位数的位值展开式中，每一个位值单位都可以被看作一个“一”加上一个三或九的倍数。因此，当整个数被分解后，所有位值单位所贡献的三或九的倍数部分会自动汇集成一个大的倍数，而剩下的部分，正是各个数位上的数字本身相加之和。所以，原数除以三或九的余数，必然等于其各位数字之和除以三或九的余数。

这里的理论本质是利用了“十的幂次除以九或三余一”这一核心性质，实现了从对一个宏观大数的判断，向对其微观数字组成部分之和的判断的巧妙转化。这背后已然触及了初等的“同余”数学思想，展现了数学内在的和谐与统一之

美。通过这样的分析，学生能够初步接触到更高级的数学思想，为后续学习奠定基础。

## 3 整除规律的应用逻辑：从工具价值到思维价值

对理论本质的深刻理解，为构建一个层次分明、逻辑严谨的应用体系奠定了坚实基础。整除规律的应用，应当是一个从浅层技能走向深层思维的渐进过程。在教学实践中，教师需要精心设计教学环节，引导学生经历从感知到理解、从理解到应用、从应用到创新的完整认知过程。这样的教学过程不仅能够帮助学生掌握知识技能，更能促进其数学思维的发展<sup>[4]</sup>。

### 3.1 工具性应用层：提升运算效率与判断能力

**快速判定与验算：**在解决实际问题时，如判断一定数量的物品能否在若干群体间实现完全均分，无需执行完整的除法运算，直接应用相关整除规律即可迅速得出结论，极大提升了解题效率。同时，它也可作为检验复杂计算结果合理性的有效辅助手段。通过大量的实践练习，学生能够逐渐内化这些规律，形成敏锐的数感。

**简化计算过程：**在进行除法运算，特别是涉及较大数字时，利用整除规律进行预判，可以明确商是否为整数，从而指导试商过程，减少盲目性。这种应用不仅提高了计算效率，更重要的是培养了学生选择策略、优化方法的意识。

### 3.2 综合性应用层：解决复杂情境问题

**破解数字谜题：**在各类数字填充或算式重构的谜题中，整除规律常常是进行逻辑推理的关键约束条件。例如，利用九的倍数特征，可以确定算式中所缺失的数字可能范围，为解决问题提供决定性线索。这类活动能够有效培养学生的逻辑思维能力和推理能力。

**处理周期现象与分配问题：**在日常生活中常见的周期排列、循环现象问题中，确定某个序位上的状态，归根结底是求余数问题。而快速、准确地求余，往往依赖于对整除性的快速判断。在复杂的分配问题中，将情境转化为寻找满足特定整除条件的数，是解决问题的核心步骤。通过这些实际问题的解决，学生能够体会到数学的实用价值，增强学习兴趣<sup>[5]</sup>。

### 3.3 思维性建构层：滋养数学核心素养

**归纳思维的训练场：**教师不应直接呈现规律，而应引导学生观察一系列相关数列，通过比较、分析，自主发现并归纳出共性特征。这个过程本身就是一次完整的、微型的数学发现之旅，极大地锻炼了学生的观察力与归纳能力。通过这样的训练，学生能够逐步掌握数学研究的基本方法。

**演绎推理的启蒙点：**在学生归纳出规律后，引导他们思考“为什么这是真的？”利用位值制原理，即使不使用抽象字母符号，仅通过具体数字的实例性演绎，也能向学生清晰地展示从已知公理推导出新命题的完整逻辑链条。这是演

绎推理思想在小学数学中绝佳的启蒙时机。通过这样的训练,学生能够初步形成严谨的思维习惯<sup>[6]</sup>。

模型思想的初步体验:每一个整除规律都可以被视为一个简洁的数学模型:输入一个数字,经过一个特定的、基于数位操作的算法,输出一个布尔判断。引导学生理解并运用这些模型,是培养其数学模型思想的起点。通过这样的体验,学生能够初步了解数学建模的基本思想。

知识网络的连接枢纽:引导学生探究不同规律之间的内在联系。例如,探讨为何一个数要同时满足二和三的倍数特征才能被六整除?这促使学生将整除性与因数分解、互质概念等知识联系起来,从而将原本孤立的知识点编织成一张相互关联、相互支撑的知识网络,深刻体会到数学的系统性与整体性。通过这样的学习,学生能够建立起更加完善的认知结构<sup>[7]</sup>。

#### 4 教学启示:指向本质与思维的教学转向

实现教学重心从“结论传递”到“过程探究”的转移。教学设计应赋予学生充足的时空,去经历规律的发现、猜想与验证过程,让知识在思维活动中自然生成。教师应该创设合适的教学情境,设计富有启发性的问题链,引导学生主动探究<sup>[8]</sup>。在这个过程中,教师要耐心等待,给予学生充分的思考时间,允许学生犯错并在错误中学习。通过这样的教学过程,学生获得不仅是知识本身,更重要的是获取知识的方法和能力。

坚持“明算理”与“习技能”并重。对于中高年级学生,教师必须致力于揭示规律背后的算理。通过位值制这一通用原理,将各种规律统一起来,帮助学生构建“为何可行”的心理认同,破除对数学规律的机械认知。在解释算理时,教师应该根据学生的认知水平选择合适的表达方式,既保证科学性,又确保可理解性。可以通过具体的例子、形象的比喻、恰当的图示等多种方式帮助学生理解抽象的原理<sup>[9]</sup>。

构建促进思维发展的层次化任务体系。练习与任务的设计应超越单一的技能重复,涵盖从基础判断、综合应用到解释说理、探索发现的多个层次,以此驱动不同层次数学思维的发展。教师应该设计开放性问题、探究性任务,鼓励学生多角度思考问题。在任务设计中要考虑到学生的个体差异,设置不同难度层次的问题,让每个学生都能在原有基础上获得发展。

强化知识之间的横向关联。在教学过程中,教师应主动地将整除知识与奇数偶数、因数倍数、分数基本性质等内容进行贯通,引导学生构建纵横交错的知识网络,感悟数学

的统一性。教师应该具备整体把握教材的能力,在教学某个知识点时,要清楚地知道这个知识点在知识体系中的位置,以及与其他知识点的联系。通过建立知识之间的联系,帮助学生形成系统化的认知结构<sup>[10]</sup>。

#### 5 结语

通过深入剖析其根植于“位值制”的统一理论本质,我们可将零散规则整合为逻辑连贯的知识体系。通过构建从“工具应用”到“思维建构”的层次化应用逻辑,能引导教学从技能掌握转向内在数学思维培养,让规律学习成为学生体验数学思想、发展推理能力、构建知识网络的历程,这是提升教学质量、实现数学教育“启迪智慧、滋养思维”目标的关键路径。

未来教学实践中,需进一步探索如何将理论转化为具体教学行为、设计有效活动落实理念,这需要教育工作者共同努力。我们相信,深化对数学知识本质的理解、优化教学方法,能更好促进学生数学素养发展,为终身学习奠基,助力其形成用数学眼光观察、思维思考、语言表达世界的核心能力。

#### 参考文献

- [1] 沈宗标,夏代忠.善待错误生成精彩——《能被3整除的数的特征》教学案例与反思[J].湖北教育(教育教学),2009,(05):21-22.
- [2] 徐照妹.小学数学中整除性问题及其教学的探究[J].小学生(下旬刊),2017,(10):2.
- [3] 冯俊.“能被3整除的数的特征”教学实录及设计意图[J].小学青年教师,2002,(02):23-25.
- [4] 陈芬芳.选特例找反例——例谈“能被3整除的数的特征”教学[J].小学时代(教师版),2009,(06):69.
- [5] 徐方洁,王桂侠.让学生享受“捕鱼”的快乐——“能被3整除的数的特征”教学实录及评析[J].小学教学参考,2006,(Z3):44-45.
- [6] 于庆.整除的数字特征——小学数学教学中的初等数论问题[J].科学大众(科学教育),2012,(08):73.
- [7] 丁月芳.培养核心素养的“和融课堂”的实践与思考——以“因数与倍数的再认识”的教学探索为例[J].小学教学研究,2019,(22):77-80.
- [8] 陶柱中.从一道高考数学试题说开去——北师大版小学数学教材“数的整除性”知识编排的商榷[J].中小学数学(小学版),2023,(Z1):25.
- [9] 刘颖,高子清,周淑红.整除理论——小学数学教学中的初等数论问题[J].数理化学学习,2013,(04):93.
- [10] 章敏.例谈小学数学教学中的激疑——关于《能被3整除的数》的教学反思[J].小学教学研究,2012,(13):50-51.