

Inspiring Thoughts Through History: Exploring the Integration of Mathematical History into the Teaching of Logarithmic Concepts

Fenli Pu¹ Shanshan Cai^{1*} Shoucheng Yuan¹ Youyan Zhong²

1. Pu'er University, Pu'er, Yunnan, 665000, China

2. The Second Middle School of the Ninth Regiment, Alar City, First Division of Xinjiang Production and Construction Corps, Alar, Xinjiang, 843300, China

Abstract

The invention of logarithms is a classic example in the history of mathematics of “creating tools to simplify labor”. This paper takes the teaching of logarithmic concepts with the integration of mathematical history as an example. Based on the reconstruction of mathematics history teaching, the “cold” logarithmic formulas are transformed into a “hot” thinking process, enabling students not only to understand the occurrence, development and reasoning process of logarithmic mathematical knowledge, but also to generate a desire for in-depth study of mathematical knowledge.

Keywords

Mathematical History; Logarithmic Teaching; Teaching Exploration

以史启思：数学史融入对数概念的教学探究

普粉丽¹ 蔡姗姗^{1*} 袁守成¹ 钟友研²

1. 普洱学院, 中国·云南普洱 665000

2. 新疆生产建设兵团第一师阿拉尔市九团第二中学, 中国·新疆阿拉尔 843300

摘要

“对数”的发明是数学史上“为简化劳动而创造工具”的典例, 本文以数学史融入对数概念的教学为例, 基于数学史的教学重构, 将“冰冷”的对数公式转化为“火热”的思考历程, 让学生不仅了解对数数学知识的发生、发展和推理过程, 还能产生对对数知识深入学习的渴望。

关键词

数学史; 对数教学; 教学探究

1 研究背景

我国《普通高中数学课程标准(2017年版)》明确指出, 数学教育需引导学生深刻体悟科学的科学意义、应用功能与

【基金项目】2025年普洱学院教育教学改革研究重点项目(项目编号: 2025JGZD02); 普洱学院重点教改项目(项目编号: 2022JGZD007); 2024年一流课程(项目编号: 2024YLKCYB020); 2024年课程思政示范课(项目编号: 2024KCSZ004)。

【作者简介】普粉丽(1980-), 女, 中国云南江川人, 硕士, 副教授, 从事课程与教学论(数学)研究。

【通讯作者】蔡姗姗(1983-), 女, 哈尼族, 中国云南景东人, 硕士, 副教授, 从事微分几何研究。

文化内涵, 助力学生养成理性思辨的思维与勇于探索的创新品格, 进而增强其社会责任感与民族自豪感^[1]。本文以“对数”为载体, 探究其独特的教育价值。“对数”的发明是数学史上“为简化劳动而创造工具”的典例, 完美体现了问题驱动创新的全过程, 探究如何设计数学史融入对数概念的教学方法, 能有效促进学生了对概念的理解。

2 对数的历史发展简史

对数思想的萌芽, 阿基米德在公元前500年, 发现了10的连乘与10的个数之间存在某种规律, 可惜阿基米德没有继续研究。

15世纪, 法国数学家许凯在其《算学三部》中给出了双数列之间的对应关系^[2]。一列数的乘除运算结果, 恰好与另一列数的加减运算结果形成对应关系。16世纪, 德国数学家斯蒂非尔更为明确地提出了前一列数的四则运算法则, 涵盖乘除、乘方与开方运算。但彼时指数概念尚未问世, 一

且这列数的间隔过大，人们便难以构建起完整的对应关联。

苏格兰数学家纳皮尔提出对数的概念，他对乘、除、平方、开方，他耗费二十载心血潜心钻研，独立创制出对数这一重要数学工具，并于1614年刊印《奇妙的对数定理说明书》，对数概念自此正式诞生。

此后，伦敦数学家亨利·布里格斯向纳皮尔提出对数改良建议，主张设定1的对数值为0、10的对数值为1，基于这一构想，更为简便实用的常用对数表得以编纂出版。纳皮尔终其一生，都将心血倾注在对数的研究事业上。

17世纪，笛卡尔发明了幂的符号表示法，指数概念也随之应运而生。直到17世纪末期，数学界才逐渐厘清对数与幂指数的内在关联，意识到对数可以借助幂指数来定义。

对数的发明堪称计算领域的一场深刻革命，法国著名数学家、天文学家拉普拉斯曾这样盛赞：“对数的出现省时又省力，无异于将天文学家的寿命延长了一倍。”

步入18世纪，欧拉深入剖析并厘清了指数与对数之间的内在关联，提出了“对数源于指数”，还创设沿用至今的对数符号 $\log_a N$ ^[3]。如今初高中数学教材中，指数与对数的教学编排顺序却截然相反，是指数内容在前，对数内容在后，这与二者在历史上的诞生与发展顺序正好相反。

现今，指数与对数本身已成为初高中数学教学的重要内容。而最早传入我国的文献，是波兰的穆尼斯和我国的薛凤祚于1653年合编的《比例与对数》，书中将 \log_{arithm} 翻译成“对数”，自此“对数”在我国沿用开来。

清代由康熙主持编纂的《数理精蕴》，对真数与假数（对数）的对应规律作出了详尽的解释，书中点明“对数”之“对”，取“对应”“相对”之意，清晰诠释了这一概念的命名根源。

3 教学设计与实施

3.1 创设历史问题，导入新课

历史问题：16世纪下半叶丹麦的天文学家第谷·布拉赫，进行大量精密的天文观测，以便为航海的人们确定船只的位

置，在观测后会得到很多数据，这些数据通常是杂乱无章的，处理数据就成了他最头疼的一件事情。比如他要处理几个运算：(1) 32×1024 ；(2) $8192 \div 32$ ；(3) 8^5 ；(4) $\sqrt{16384}$ ；(5) $299792.468 \times 31536000$ 。可以看出前面两道题很容易就可以算出，但是第五道题并不太容易。用我们现在的知识，对于第三道与第四道题可用笔算乘方、开方计算。

第五道题是光年的计算，人类社会持续进步，对宇宙的探索也不断向深处推进，这使得人们对计算的速度与精度提出了越来越高的要求。以光年的计算为例，光在真空中的传播速度为299792.468千米/秒，一年的总秒数约为31536000秒，这样的数值运算本身就颇具难度。光年尚且只是天文学中的基础单位，其运算就已这般繁琐，探索浩瀚宇宙的整体任务之艰巨，可想而知。在没有计算器的古代，人们常常被繁杂的大数运算困住，倍感棘手。为了测算出一颗行星的准确位置，往往要投入数月乃至数年的时间，庞大的天文数值计算，严重制约了人类探索宇宙的步伐。对此，数学家们也颇有感触：“再没有比大数的乘除、开平方及开立方运算，更让数学研究者困扰、阻碍计算工作推进的了——这类运算不仅耗时费力，还极易出现误差。”

师：如何计算一光年呢？有没有更好的办法来解决大数的计算呢？早在公元前500年左右，阿基米德探究过10的连乘运算与对应连乘次数之间的关系。遗憾的是，他未能将这项研究深入推进，最终错失了让对数概念萌芽的契机。

此后，法国数学家许凯在著作《算学三部》中，编制出一份2的各次幂与对应指数的对照表。试着用表1来计算给出的前四道题。

生1：我们可以看到32是2的5次幂，1024是2的10次幂，根据指数运算性质可知 $32 \times 1024 = 2^5 \times 2^{10} = 2^{5+10} = 2^{15}$ ，经查表可知第一道题的结果为32768。

生2：我们可以看到8192是2的13次幂，32是2的5次幂，根据指数运算性质可知 $8192 \div 32 = 2^{13} \div 2^5 = 2^{13-5} = 2^8$ ，经查表可知第二道题的结果为256。

表1的各次幂与对应指数的对照表

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$y = 2^x$	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	
x	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...
$y = 2^x$	1024	2048	4096	8192	16384	32768	66536	131072	262144	524288	...

生3：我们可以看到8是2的3次幂，根据指数运算性质可知 $8^5 = (2^3)^5 = 2^{3 \times 5} = 2^{15}$ ，经查表可知第三道题的结果为32768。

生4：我们可以看到16384是2的14次幂，根据指数运算性质可知 $\sqrt{16384} = \sqrt{2^{14}} = 2^{14 \div 2} = 2^7$ ，经查表可知第四道题的结果为128。

师：以上四道题的计算是利用乘除法运算转化为指数的加减运算，次方与开方运算转化为乘法与除法运算来完

成。这个化简的本质就是化乘除为加减，化乘方开方为乘除，古人通过这个对应方式实现了简化计算，使运算降级。

在中国古代，对于高精度值的计算，如祖冲之关于圆周率的计算，《九章算术》中大规模比例问题的求解，都是化繁为简，因此“化繁为简”是普世的数学追求。

师：问题（5）的计算，是当时的人们所面临的问题，苏格兰数学家纳皮尔提出对数的概念，他耗费二十载心血潜心钻研，独立创制出对数这一重要数学工具，并于1614年

刊印《奇妙的对数定理说明书》，对数概念自此正式诞生。此后，伦敦数学家亨利·布里格斯向纳皮尔提出对数改良建议，主张设定1的对数值为0、10的对数值为1，基于这一构想，更为简便实用的常用对数表得以编纂出版。纳皮尔终其一生，都将心血倾注在对数的研究事业上。

【设计意图】教师在此讲述对数的由来，运用了附加式、复制式，介绍对数的历史背景，为后面的课程做铺垫，通过数学史的讲解，提高学生的学习兴趣，激发学生主动探究的欲望，对对数的认知规律。讲对数的发现过程：第一个数学家没有发现对数，但已经是黎明前的黑暗了，第二、三位数学家的不断探索，体现数学家迎难而上、锲而不舍的精神。

3.2 跟随历史，探索新知

新知探究1：提出问题

在初中时，我们学习 $x^2=2$ ，当时为了求 x 的值，我们引入了根号符号 $\sqrt{\quad}$ ，解得 $x=\pm\sqrt{2}$ 。现在遇到反向问题 $2^x=5$ ，已知底数和幂值，求对应的指数 x 等于多少，仅用已学知识就难以求解了。

为破解这类指数求解难题，需引入一种全新的数学符号。纳皮尔对此独具巧思，创造了对数符号“log”，该符号源自拉丁文“*logarithm*”，中文直译即为“对数”。“log”的作用是连接运算中的底数与幂值，代表一种有别于乘除、开方的新运算，运算结果是一个确定的数值。以“ $2^x=5$ ”这一关系为例，可表示为“ $x=\log_2 5$ ”，读作“以2为底5的对数”，清晰界定了指数与底数、幂值的关联。

【设计意图】从学生已掌握的指数知识切入，逐步引导其直面“已知底数和幂值求指数”的新问题，引发认知冲突与探究思考。在发现现有知识无法解决该问题的基础上，让学生切实体会引入对数运算及对应符号的必要性，进而深化对数学符号产生与运用逻辑的理解。

探究新知2：对数概念的形成

师：根据上面的推导我们得到对数的定义：一般地，如果 $a^x=N$ （ $a>0$ 且 $a\neq 1$ ），那么数叫做 x 以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_a N$ ，其中 a 叫做对数的底数， N 叫做真数。 $a^x=N\Leftrightarrow\log_a N=x$ ，其中常用对数以10为底，并把 $\log_{10} N$ 记作 $\lg N$ 。

师：大家知道吗？对数这一数学概念，是在明末清初传入我国的，那会儿正好是康熙帝在位期间。他主持编纂的《数理精蕴》这本书里，专门提及了对数的命名由来，其中的“对”字可不是随意选用的，它承载着“对应”与“相对”的核心含义^[4]。

【设计意图】理解对数概念的内涵，掌握对数的读写方法，初步建立指数与对数的互化思维。这一过程既有效激发学生的学习兴趣，又让其亲历从特殊实例到一般概念的推导过程，激活逻辑思维，培养抽象概括能力，切实落实数学核心素养的培育目标。同时，结合中国古代数学家对对数的研究成果阅读，进一步深化对对数新知识的理解，渗透数学文化底蕴。

师：大家有没有察觉到，指数和对数之间存在着紧密

的内在关联？像指数式 $a^b=N$ 与对数式 $\log_a N=b$ 这两个等式，本质是同一组数量关系的不同表达形式。两个式子中的字母 a 都叫做底数，不同之处在于：指数式里的字母 b 是指数， N 是幂；而在对数式中，字母 b 称为以 a 为底 N 的对数， N 则叫做真数。

【设计意图】引导学生分析指数式与对数式的互化逻辑，明确三个量在不同表达式中的称谓与含义差异，帮助学生厘清二者的形式区别与本质联系，深化对两个概念的理解。同时，在这一过程中渗透等价转化的数学思想，让学生体会其在数学研究中的重要价值。

探究新知3：探究性质，深化概念

例：(1) $\log_a 1=?$ (2) $\log_a a=?$

学生：因为 $a^0=1$ ， $a^1=a$ ，所以(1) $\log_a 1=0$ ，(2) $\log_a a=1$ 。

师：根据以上两题可以得出对的两个性质。1的对数为0，以 a 为底 a 的对数为1。在指数函数 $y=a^x$ 中，我们规定了 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 。在对数 $\log_a N$ 中，我们同样规定 $a>0$ 且 $a\neq 1$ ，为什么会有这样的规定呢？让学生思考。

【设计意图】引导学生深层次理解对数的概念，让学生体会对数可转化为指数，两都之间具有等价性，对特殊对数的探索与分析，可以帮助学生真正意义上理解在对数式中的联系。其实在数学历史的发展过程中，是先有了对数，才有指数的，但是教材编过程中是先学习指数再学习对数，我们今天求解对数也是利用指数知识来求解对数，这就是教材编写历史出现顺序有时并不一致。

3.3 归纳总结，梳理收获

师：同学们，咱们这节课的内容就梳理到这里了。结合整节课的学习，大家在数学知识掌握和数学思想方法运用这两个方面，都有哪些收获可以和大家分享呀？

【设计意图】通过对教学内容的梳理与总结，帮助学生厘清对数知识的发展脉络，明确节课的基础知识、方法与基本思想，体会数学家们对数学知识追求的严谨与热爱。

4 结语

数学史融入到课堂教学中，不仅是为了更好地传授知识，更是让学生意识到，今天在课堂上演算的每一个公式，都曾是人类智慧突破迷雾的辉煌瞬间，跟随历史步伐“发明”对数的过程，深刻改变了学生对数学本质的看法。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2022年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2022.
- [2] 钟萍, 汪晓勤. 对数概念: 从历史到课堂[J]. 中学数学月刊, 2015(5): 50-53.
- [3] 赵飞虎. HPM视角下对数及对数函数的教学行动研究[D]. 牡丹江: 牡丹江师范学院, 2021年.
- [4] 王瑶. HPM视角下对数的教学设计研究[D]. 武汉: 华中师范大学. 2024.